Lección 1.8: Condiciones de Rankine-Hugoniot (continuación). Pérdida de unicidad.

$$(SLC) \qquad u_t + \sum_{j=1}^{d} f^j(u)_{x_j} = 0 \qquad \cdots (1)$$

Discontinuidad $\Sigma = \{ \psi(x,t) = 0 \}$ ←

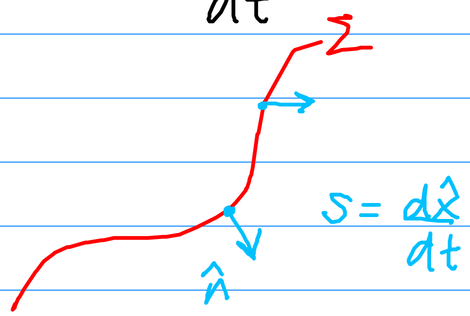
$$\hat{n}_t [\![u]\!] + \sum_{j=1}^{d} \hat{n}_j [\![f^j(u)]\!] = 0 \qquad \cdots (2)$$

(2) expresa la conservación de u a través de Σ.

caso $d=1$: $\Sigma = \{ x = \hat{x}(t),\ t \in I \subset \mathbb{R} \}$

$$(2) \Rightarrow (3) \ldots \quad -\frac{d\hat{x}}{dt} [\![u]\!] + [\![f(u)]\!] = 0.$$

$s := \dfrac{d\hat{x}}{dt}$ "velocidad" de la discontinuidad



$u \in \mathbb{R}^n$

(3) relación vectorial: colinealidad de $[\![u]\!]$ con $[\![f(u)]\!]$.

Caso $d=1$, $n=1$:

$$(3) \Rightarrow \qquad -s [\![u]\!] + [\![f(u)]\!] = 0$$

$$\Rightarrow \qquad s = \frac{[\![f(u)]\!]}{[\![u]\!]} \in \mathbb{R}$$

$[\![u]\!] \neq 0$ sobre Σ

Frente plano

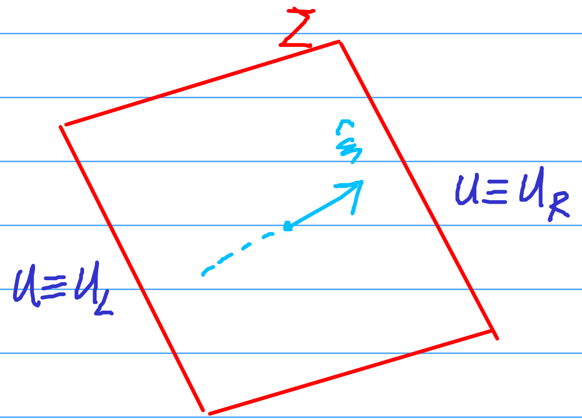
$$\Sigma = \left\{ (x,t) \in \mathbb{R}^d \times (0,\infty) \; : \; \overbrace{x\cdot\hat{\xi} - st}^{=4} = 0 \right\}$$

con $\hat{\xi} \in \mathbb{R}^d$, $|\hat{\xi}| = 1$ dirección de propagación, $s \in \mathbb{R}$.

Frente plano:

$$(4)\ldots \quad u(x,t) = \begin{cases} u_R, & x\cdot\hat{\xi} > st \\ u_L, & x\cdot\hat{\xi} < st \end{cases}$$

con $u_R, u_L \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$, constantes, $u_L \neq u_R$



$$\hat{n} = \frac{1}{\sqrt{(*)}} \begin{pmatrix} \hat{\xi} \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$(RH) \Rightarrow \qquad -s[\![u]\!] + \sum_{j=1}^{d} \hat{\xi}_j [\![f^j(u)]\!] = 0$$

sobre Σ

$$\Leftrightarrow \quad -s\,(u_R - u_L) + \sum_{j=1}^{d} \hat{\xi}_j \left(f^j(u_R) - f^j(u_L)\right) = 0$$

$\ldots(5)$

RH para frente plano.

Caso $n=1$, $d=1$:

$$u(x,t) = \begin{cases} u_R, & x > st \\ u_L, & x < st \end{cases}$$

con $$s = \frac{f(u_R) - f(u_L)}{u_R - u_L}, \qquad u_R \neq u_L \in \mathbb{R}.$$

No unicidad de soluciones débiles

Ejemplo: ecuación de Burgers no viscosa

$$u_t + \left(\tfrac{1}{2}u^2\right)_x = 0 \qquad \cdots (1)$$

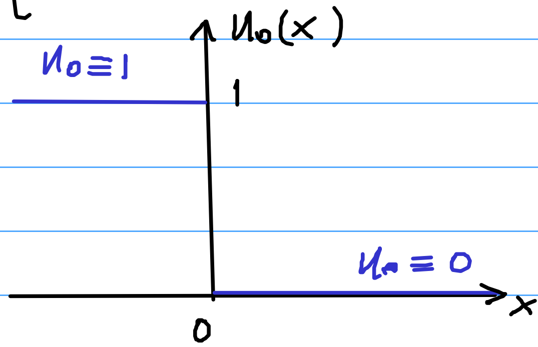
$x \in \mathbb{R}$, $t > 0$, $u = u(x,t) \in \mathbb{R}$

$f(u) = \frac{1}{2}u^2$ flujo de Burgers

Problema de Cauchy : (1) con condición inicial

$$u_0(x) = \begin{cases} 0, & x > 0 \\ 1, & x < 0 \end{cases} \qquad \cdots (2)$$

$=$

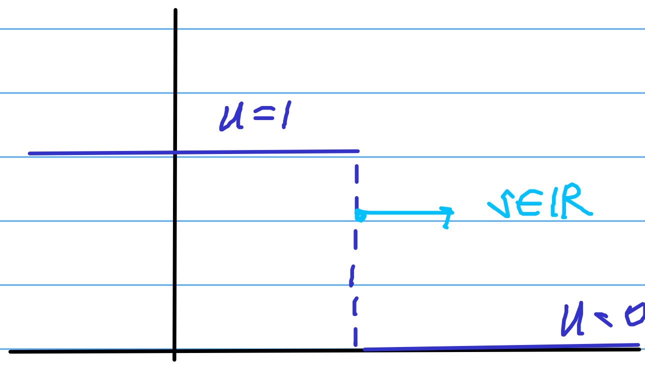


Problema de Riemann. $u_R = 0$, $u_L = 1$

solución débil : proponemos un ansatz en frente plano

$$(3) \cdots \quad u(x,t) = \begin{cases} u_R = 0, & x - st > 0 \\ u_L = 1, & x - st < 0 \end{cases}$$

con s_{EIR} velocidad del frente plano



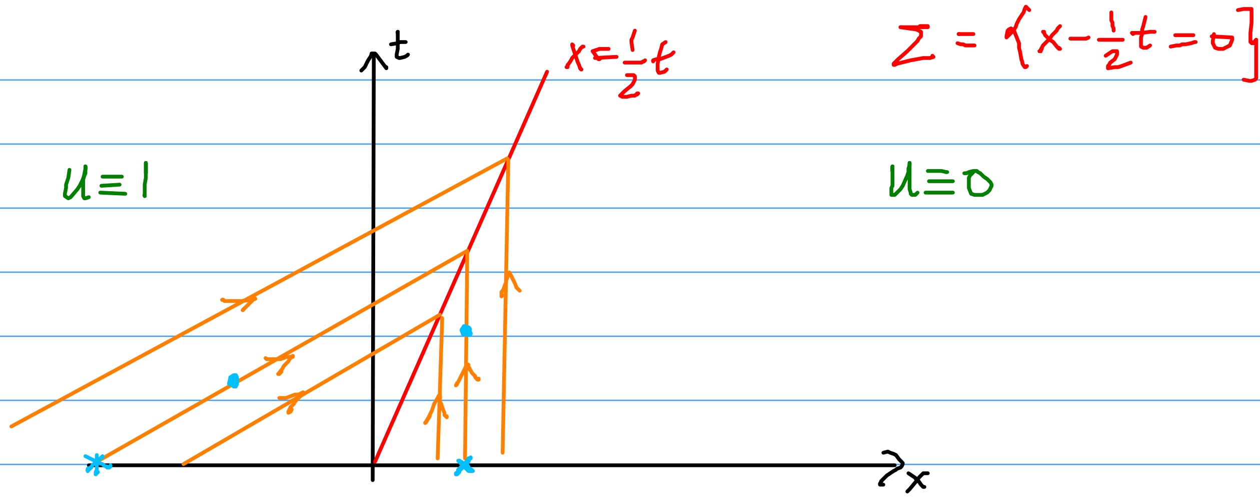
s_{EIR} debe obedecer RH :

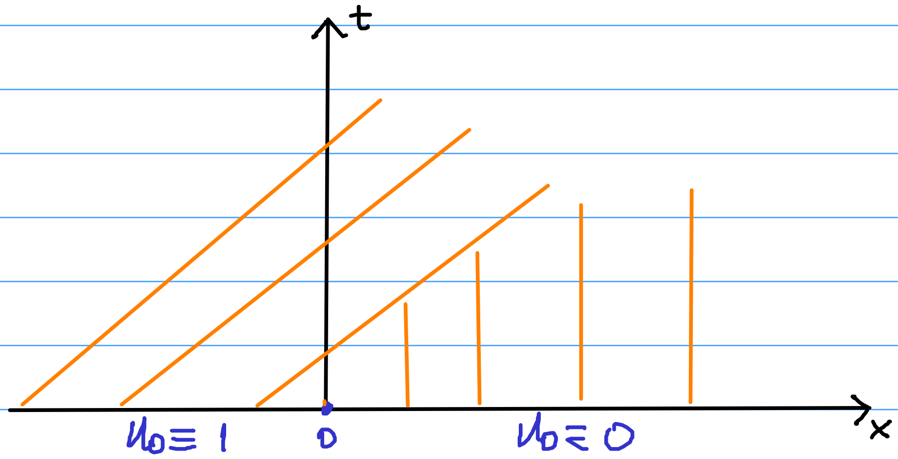
$$s = \frac{[\![f(u)]\!]}{[\![u]\!]} = \frac{f(u_R) - f(u_L)}{u_R - u_L}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}(0)^2 - \frac{1}{2}(1)^2}{0 - 1} = \frac{1}{2}$$

$$(3') \cdots \quad u(x,t) = \begin{cases} 0, & x > \frac{1}{2}t \\ 1, & x < \frac{1}{2}t \end{cases}$$

Frente plano, solución débil de (1)-(2).





solución es constante a lo largo de rectas características de la forma

$$\hat{x}(t) = ut + x_0 \,, \qquad u = \text{constante}.$$

otro problema de Riemann : (1) con condición inicial

$$(4) \ldots \qquad u_0(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

$$u_R = 1, \quad u_L = 0$$

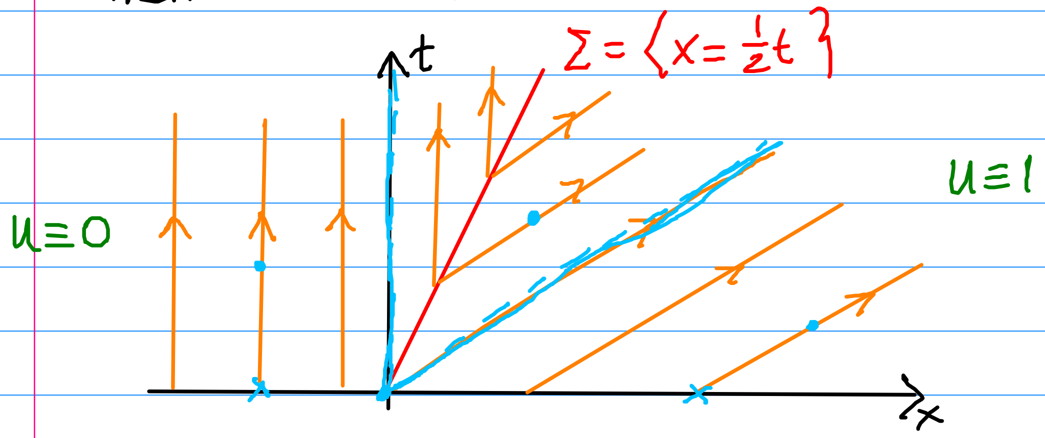
Solución débil : frente plano

$$(5)\cdots \qquad u(x,t) = \begin{cases} 1, & x > st \\ 0, & x < st \end{cases} \qquad \left[\begin{matrix} \text{de } (1) \\ \text{con } (4) \end{matrix}\right]$$

con velocidad

$$s = \frac{[\![f(u)]\!]}{[\![u]\!]} = \frac{\frac{1}{2}(1)^2 - \frac{1}{2}(0)^2}{1-0} = \frac{1}{2}$$

Misma velocidad.



otra solución débil de (1) con (4) :

$$(6)\cdots \qquad u(x,t) = \begin{cases} 1, & x > t \\ \frac{x}{t}, & 0 \leq x \leq t \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

En el sector $0 < x < t$:

$$u_t + \frac{1}{2}(u^2)_x = \partial_t\left(\frac{x}{t}\right) + \partial_x\left(\frac{1}{2}\frac{x^2}{t^2}\right)$$

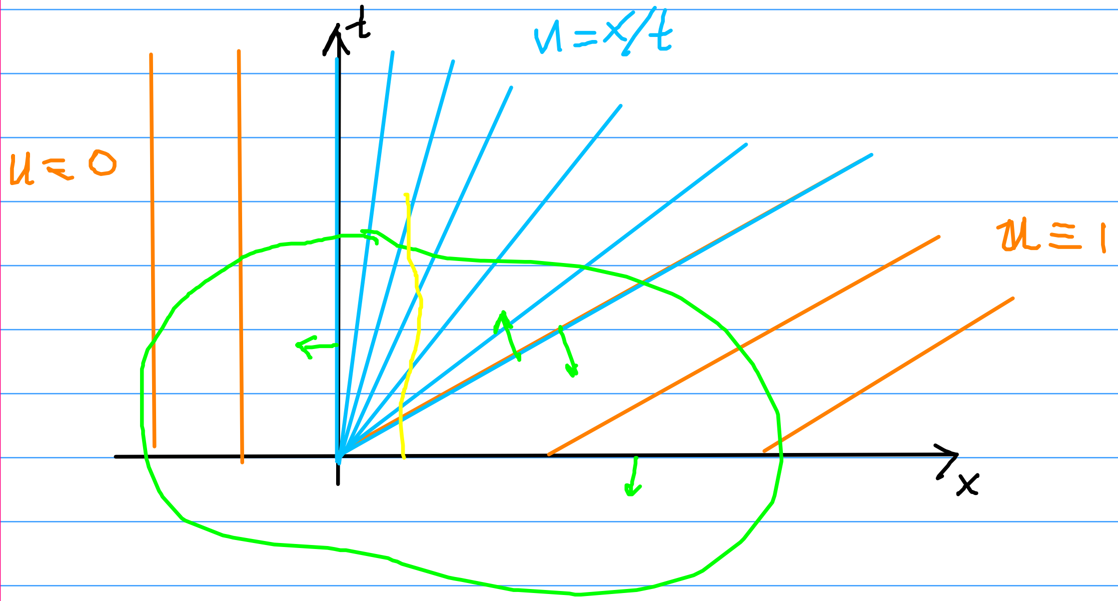
$$= -\frac{x}{t^2} + \frac{x}{t^2} = 0$$

(6) es solución clásica en las regiones abiertas : $\begin{cases} 0 < x < t \\ x > 0 \\ t < x \end{cases}$

(6) es continua, es solución clásica de (1), y satisface $u(x,0) = u_0(x)$ dada por (4)

<u>Lema</u> (6) es solución débil del problema de Cauchy (1) y (4).

<u>Dem.</u> Ejercicio. $\square$



(6) es una onda de rarefacción. <u>Es</u> continua pero <u>no</u> es de clase C^1.

Conclusión : (6) (rarefacción) y (5) son <u>dos</u> soluciones débiles del mismo problema de Cauchy : (1) y (4).