Lección 1.7: Condiciones de salto de Rankine-Hugoniot.

Problema de Cauchy para un (SLC):

$$u_t + \sum_{j=1}^{d} f^j(u)_{x_j} = 0 \qquad \cdots (1)$$

condición inicial

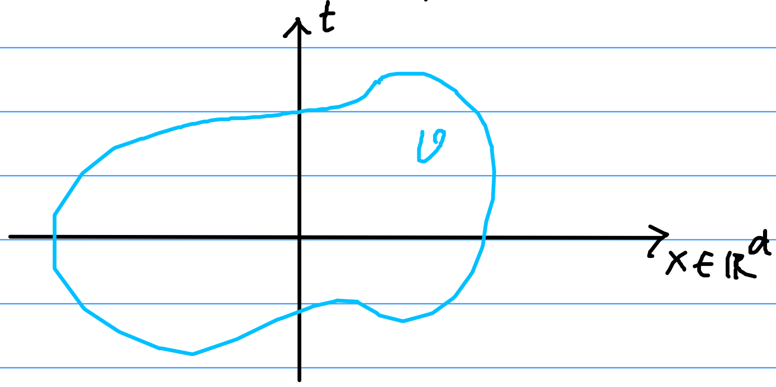
$$u(x,0) = u_0(x) \qquad \cdots (2)$$

$f^j \in C^2(\mathcal{U};\mathbb{R})$, $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, $d \geq 1$.
$u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$.

$u \in L^\infty(\mathbb{R}^d \times (0,\infty); \mathcal{U})$ es una solución débil de (1) y (2) si satisface

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} \Big(u \cdot \varphi_t + \sum_{j=1}^{d} f^j(u) \cdot \varphi_{x_j} \Big)\, dx\, dt + \int_{\mathbb{R}^d} u_0(x) \cdot \varphi(x,0)\, dx = 0 \qquad \cdots (3)$$

$\forall$ función de prueba $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$



Observaciones:

(a) Toda solución clásica $u \in C^1(\mathbb{R}^d \times [0,\infty), \mathcal{U})$ es débil (por construcción).

(b) Sea φ función de prueba pero con $\text{supp}\, \varphi \subset \mathcal{U} \subset \{t \geq \delta_0 > 0\}$, (lejos de $t < 0$). En este caso

$$(3) \Rightarrow \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} \left(u \cdot \varphi_t + \sum_{j=1}^{d} f^j(u) \cdot \varphi_{x_j} \right) dx\, dt = 0 \quad \ldots (4)$$

(c) Sea u solución débil que además es de clase C^1 en una región abierta $\mathcal{Q} \subset \mathbb{R}^d \times (0,\infty)$. Entonces, u es solución clásica en $\mathcal{Q}$. Sea $\varphi \in C_0^\infty$ tal que $\text{supp}\, \varphi \subset \{t \geq \delta_0 > 0\} \cap \mathcal{Q}$. Entonces

$$(4) \underset{\text{int. por partes}}{\Rightarrow} \int_{\mathcal{Q}} \varphi \cdot \left(u_t + \sum_{j=1}^{d} f^j(u)_{x_j} \right) dx\, dt = 0$$

$$\forall\, \varphi \in C_0^\infty \text{ t.q. } \text{supp}\, \varphi \subset \mathcal{Q}$$

$$\therefore (5) \ldots\; u_t + \sum_{j=1}^{d} f^j(u)_{x_j} = 0 \quad \text{en } \mathcal{Q}.$$

(d) Sea u una solución débil, $u \in C^1(\mathbb{R}^d \times (0,\infty))$ y sea $\mathcal{Q} = \mathbb{R}^d \times (0,\infty)$ multiplicando la ecuación por $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$:

$$0 = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} \left(u_t + \sum_{j=1}^d f^j(u)_{x_j} \right) \cdot \varphi \, dx \, dt$$

$$= - \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x,0) \cdot u(x,0) \, dx +$$

$$- \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} \left(u \cdot \varphi_t + \sum_{j=1}^d f^j(u) \cdot \varphi_{x_j} \right) dx \, dt$$

Comparando con (3):

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x,0) \cdot \left(u(x,0) - u_0(x) \right) dx = 0$$

$$\forall \varphi \in C_0^\infty$$

$$\Rightarrow \quad u(x,0) = u_0(x) \quad \text{c.d.s. en } x \in \mathbb{R}.$$

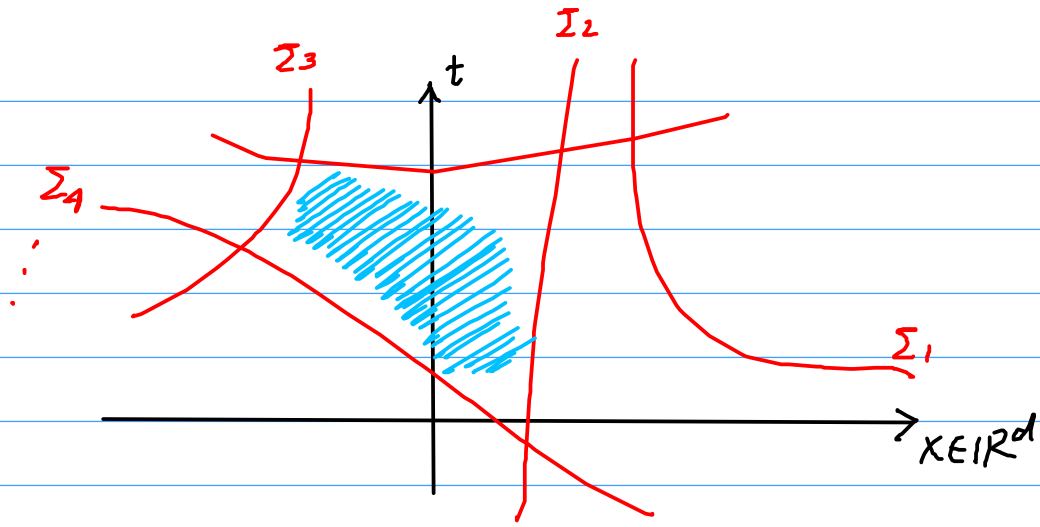
concluimos que $u \in C^1(\mathbb{R}^d \times (0,\infty)) \cap C(\mathbb{R}^d \times [0,\infty))$

$\therefore$ la noción de solución débil extiende la definición de solución clásica.

(e) (3) admite soluciones discontinuas. Por ejemplo, podemos considerar la clase de soluciones <u>C^1 por pedazos</u>:

$\exists$ Σ_k, $k \in \mathbb{N}$, número contable de discontinuidades $\Sigma_k \subset \mathbb{R}^d \times (0,\infty)$, $|\Sigma_k| = 0$

fuera de $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \Sigma_k$, $u \in C^1$, y es solución de (SLC)



Sin embargo no toda discontinuidad es permisible.

Condiciones de salto de Rankine-Hugoniot

Sea u solución débil de clase C^1 por pedazos de (1) y (2). Sea Σ una discontinuidad de u,

$$\Sigma = \{ (x,t) \in \mathbb{R}^d \times [0,\infty) : \psi(x,t) = 0 \}$$

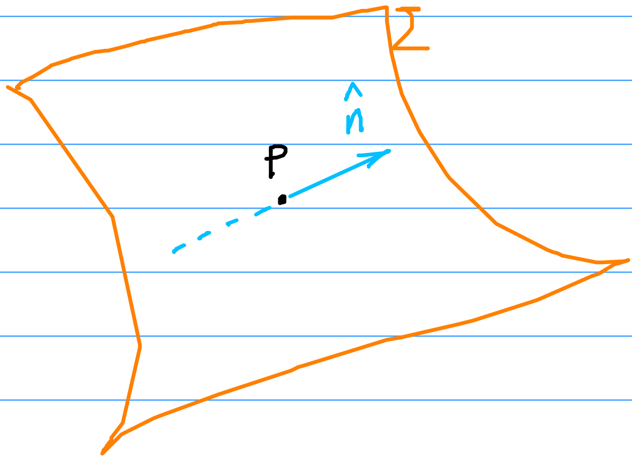
hipersuperficie orientable, con vector normal

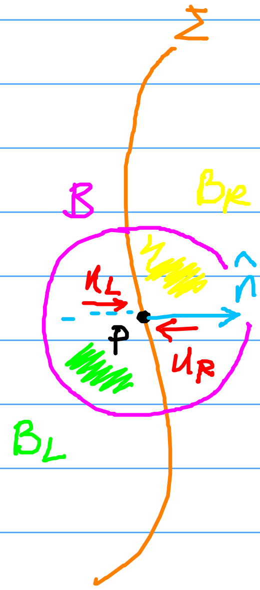
$$\hat{n} = (\underbrace{n_1, \dots, n_d}_{n_x}, n_t)^T \in \mathbb{R}^{d+1}, \quad |\hat{n}| = 1$$

con $\psi \in C^1$.

$$n_x = \frac{\nabla_x \psi}{\sqrt{\psi_t^2 + |\nabla_x \psi|^2}}, \quad n_t = \frac{\psi_t}{\sqrt{\psi_t^2 + |\nabla_x \psi|^2}}$$

Σ orientable : Σ divide el espacio-tiempo en dos regiones, $\hat{n}$ apunta al lado "derecho" de Σ.





Para cada $(x,t) = P \in \Sigma$ definimos

$$u_R := \lim_{\epsilon \to 0^+} u\big((x,t) + \epsilon \hat{n}\big)$$

$$u_L := \lim_{\epsilon \to 0^+} u\big((x,t) - \epsilon \hat{n}\big)$$

Sea B una bola pequeña, centro en $P = (x,t) \in \Sigma$, $u \in C^1$ fuera de $\Sigma \cap B$. B lejos de $\{t = 0\}$.

$B = B_L \cup B_R$.

Sea $\varphi \in C_0^\infty(B)$. Por ser solución débil por (4) :

$$\int_{B_L \cup B_R} \left(u \cdot \varphi_t + \sum_{j=1}^{d} f^j(u) \cdot \varphi_{x_j} \right) dx\, dt = 0.$$

$u \notin C^1(B_R)$, $u \in C^1(B_L)$

$$I_R := \int_{B_R} \left((u \cdot \varphi)_t + \sum_{j=1}^{d} \left(f^j(u) \cdot \varphi\right)_{x_j} \right) dx\, dt$$

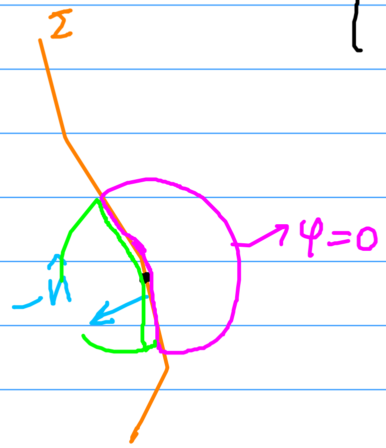
$u \notin C^1(B_R)$

$$- \int_{B_R} \varphi \cdot \Big(\underbrace{u_t + \sum_{j=1}^{d} f^j(u)_{x_j}}_{=0} \Big)\, dx\, dt$$

$$= \int_{\partial B_R} \begin{pmatrix} \varphi \cdot f^1(u) \\ \vdots \\ \varphi \cdot f^d(u) \\ \varphi \cdot u \end{pmatrix} \cdot \hat{n}_{x,t}\, dS_{x,t}$$

$\varphi = 0$ en ∂B

$$= - \int_{\Sigma \cap B} \begin{pmatrix} \varphi \cdot f^1(u) \\ \vdots \\ \varphi \cdot f^d(u) \\ \varphi \cdot u \end{pmatrix} \cdot \hat{n}_{\Sigma}\, dS_{x,t}$$



Asimismo, $$I_L = \int_{\Sigma \cap B} \begin{pmatrix} \varphi \cdot f^1(u) \\ \vdots \\ \varphi \cdot f^d(u) \\ \varphi \cdot u \end{pmatrix} \cdot \hat{n}\, dS_{x,t}$$

$$\dashv \quad 0 = I_R + I_L$$

$$= \int_{\Sigma \cap D} \left[n_t \left(u_R - u_L \right) + \sum_{j=1}^{d} n_j \left(f^j(u_R) - f^j(u_L) \right) \right] \cdot \varphi \, dS_{x,t}$$

$\forall$ B arbitraria, con centro en $P \in \Sigma$.
$\forall$ $\varphi \in C_0^\infty(B)$.

$$\Rightarrow \quad \hat{n}_t [\![u]\!] + \sum_{j=1}^{d} \hat{n}_j [\![f^j(u)]\!] = 0 \quad \cdots (6)$$

$$\forall (x,t) \in \Sigma$$

donde $$[\![g(u)]\!] := g(u_R) - g(u_L)$$

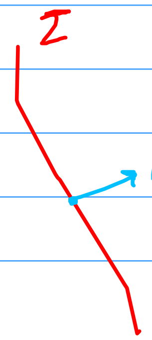
$$\forall (x,t) \in \Sigma$$

(6) se conocen como condiciones de Rankine-Hugoniot.

Ejemplo:

En $d=1$ $$\Sigma = \left\{ x = \check{x}(\xi),\ t = \check{t}(\xi) \ : \ \xi \in I \subseteq \mathbb{R} \right\}$$

$$\Rightarrow \quad \hat{n} = \frac{1}{\sqrt{\check{x}'(\xi)^2 + \check{t}'(\xi)^2}} \begin{pmatrix} \check{t}'(\xi) \\ -\check{x}'(\xi) \end{pmatrix}$$



$$-\check{x}'(s)[\![u]\!] + \check{t}'(s)[\![f(u)]\!] = 0$$

sobre Σ

Si $\check{t}'(s) \neq 0$ entonces $\Sigma = \{\tilde{x}(t) = x\}$

$$\Rightarrow \quad -\frac{d\tilde{x}}{dt}[\![u]\!] + [\![f(u)]\!] = 0$$

$\forall\, t \in \mathbb{R}$

Las condiciones de RH determinan la dinámica de Σ.