Lección 1.6: Rompimiento a tiempo finito. Soluciones débiles.

Rompimiento a tiempo finito (convección nolineal)

Consideremos la ecuación de Burgers no viscosa:

$$(1) \cdots \quad u_t + u u_x = 0, \qquad x \in \mathbb{R}, \; t > 0$$

$u = u(x,t) \in \mathbb{R}$. Para soluciones de clase C^1 (1) es equivalente a

$$(2) \cdots \quad u_t + f(u)_x = 0$$

con $\quad f(u) = \frac{1}{2}u^2 \quad$ (flujo de Burgers)

Importancia:

- (1) aproxima la ecuación de conservación de momento en mecánica de fluidos compresibles.
- $f(u) = \frac{1}{2}u^2$ es el primer término no lineal de cualquier $f = f(u)$ (no lineal) expansión de Taylor de alrededor de $u=0$.

Sea $u \in C^1(\mathbb{R} \times (0,\infty))$ una solución a (1).

Proposición Esta solución es constante a lo largo de curvas $(\hat{x}(t), t) \subset \mathbb{R} \times (0,\infty)$ que satisfacen $\frac{d\hat{x}}{dt} = u(\hat{x}(t), t)$.

Dem. Sea $\hat{x} = \hat{x}(t)$ solución de

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = u(\hat{x}(t), t),$$
$$\hat{x}(0) = y_0 \in \mathbb{R}$$

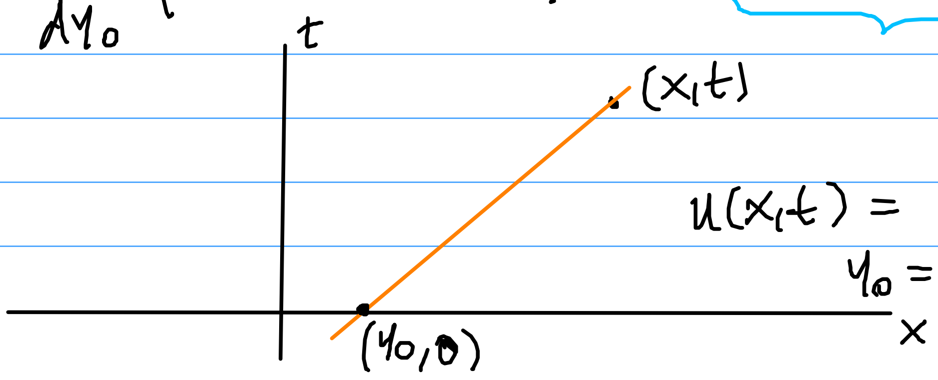
Diferenciando

$$\frac{d}{dt}\left(u(\hat{x}(t), t)\right) = u_x(\hat{x}(t), t)\,\frac{d\hat{x}}{dt} + u_t(\hat{x}(t), t)$$
$$= (uu_x + u_t)(\hat{x}(t), t)$$
$$= 0.$$

$\square$

Suponiendo $u(x,0) = u_0(x)$ (cond. inicial), dado $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,\infty)$ fijo resolver el problema de Cauchy consiste en encontrar y_0 tal que $x = u_0(y_0)t + y_0$.
Por el teorema de la función implícita para encontrar y_0 requerimos que

$$\frac{d}{dy_0}\left(u_0(y_0)t + x_0\right) = \underbrace{u_0'(y_0)t + 1}\_{} \neq 0$$



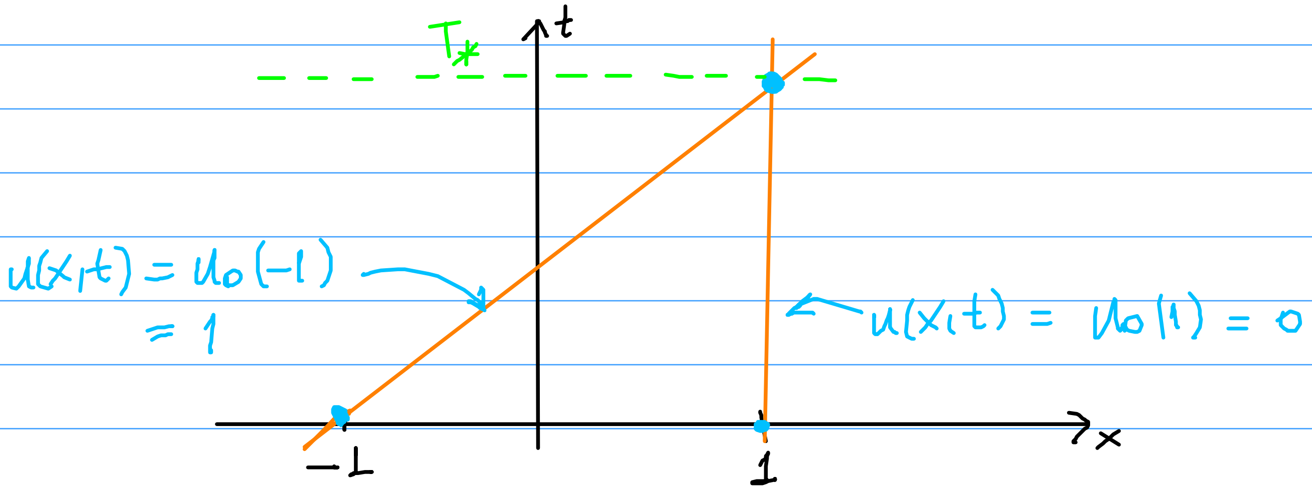
$u(x,t) = u_0(y_0)$
$y_0 = y_0(x,t)$

Supongamos que $u_0 \in C^\infty(\mathbb{R})$ tal que

- $u_0(-1) = 1$
- $u_0(1) = 0$

Características:

- $\hat{x}(t) = u_0(-1)t - 1 = t - 1$
- $\hat{x}(t) = u_0(1)t + 1 = 1$



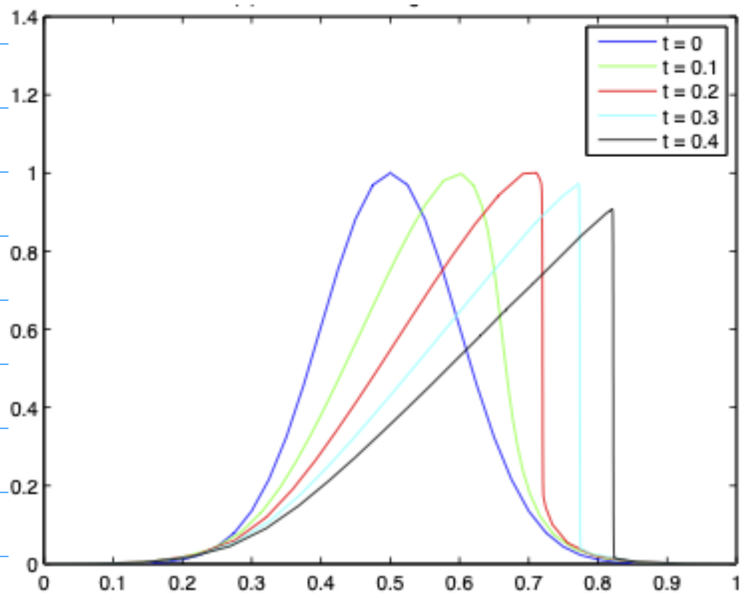
$$T_* = -\frac{1}{\min\limits_{x\in\mathbb{R}} u_0'(x)} > 0$$ tiempo de rompimiento.

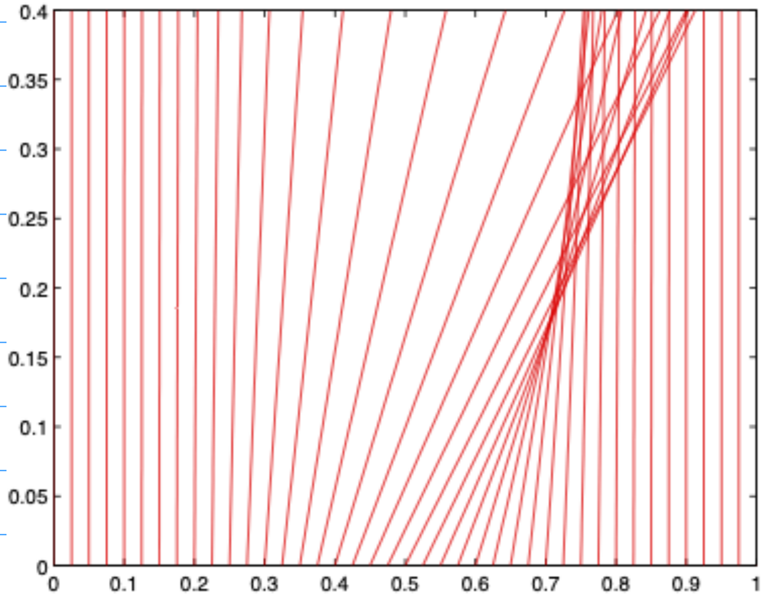
Ejemplo: resolvemos (1) con condición inicial

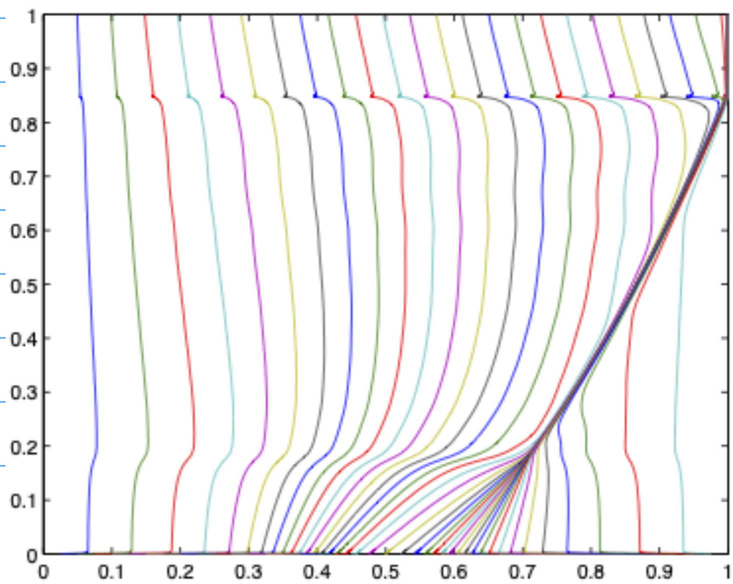
$$u_0(x) = e^{-(x-\frac{1}{2})^2} \in C^\infty(\mathbb{R})$$

$u_0'(x) < 0$ para algunos $x \in \mathbb{R}$.

Solución:


t = 0
t = 0.1
t = 0.2
t = 0.3
t = 0.4





$$u_t + f(u)_x = 0 \quad \overset{u \in C^1}{\iff} \quad \frac{d}{dt}\int_a^b u(x,t)\,dt = f(u(b)) - f(u(a))$$

Moraleja: necesitamos una nueva definición de solución.

Solución débil

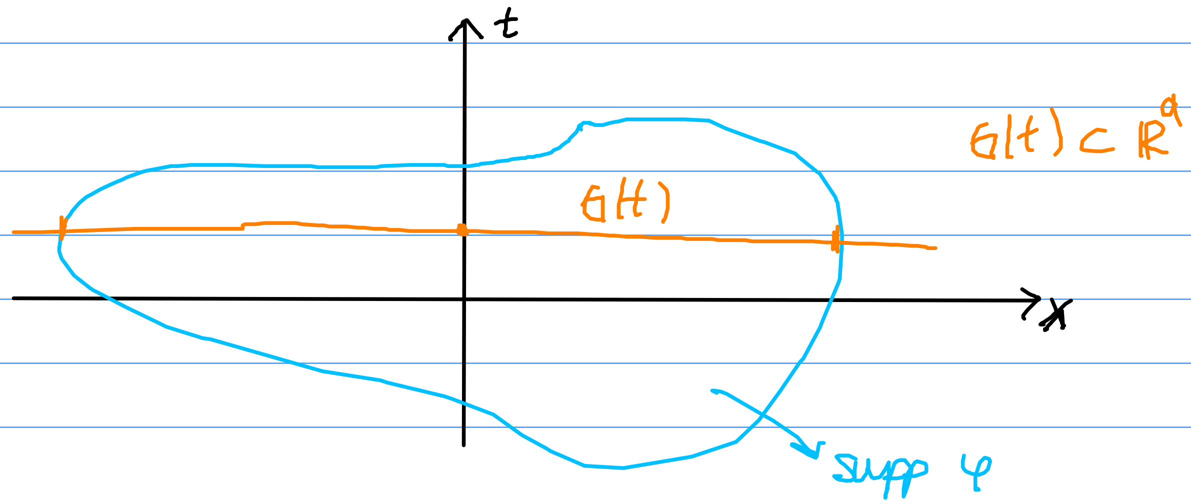
(SLC)
$$u_t + \sum_{j=1}^{d} f^j(u)_{x_j} = 0 \quad \cdots (1)$$
$$u(x,0) = u_0(x) \quad \cdots (2)$$

$(x,t) \in \mathbb{R}^d \times (0,\infty)$, $d \geq 1$,
$u \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, $f^j \in C^2(\mathcal{U}; \mathbb{R}^n)$.

Sea $u \in C^1(\mathbb{R}^d \times (0,\infty))$ una solución de (1) y (2). Sea

$$\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d \times \underbrace{\mathbb{R}}_{}; \mathbb{R}^n)$$

$\operatorname{supp} \varphi \subset\subset \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$, abierto, acotado.



Multiplicando (1) por φ e integrando en $\mathbb{R}^d \times (0,\infty)$:

$$0 = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} \left(\varphi \cdot u_t + \sum_{j=1}^{d} \varphi \cdot f^j(u)_{x_j} \right) dx\, dt$$

$$= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} \left((\varphi \cdot u)_t + \sum_{j=1}^{d} (\varphi \cdot f^j(u))_{x_j} \right) dx\, dt$$

$$- \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} \left(u \cdot \varphi_t + \sum_{j=1}^{d} f^j(u) \cdot \varphi_{x_j} \right) dx\, dt$$

Sea $G(t) \subset \mathbb{R}^d$, abierto y acotado, tal que para cada $t>0$ fijo $\operatorname{supp} \varphi(x,t) \subset G(t)$

Así $\varphi = 0$ sobre $\partial G(t)$. Por el teorema de la divergencia

$$0 = \int_{\mathbb{R}^d} (u \cdot \varphi) \Big|_{t=0}^{t=\infty} dx \; +$$

$$+ \int_0^\infty \int_{\partial G(t)} \begin{pmatrix} f^1(u) \cdot \varphi \\ \vdots \\ f^d(u) \cdot \varphi \end{pmatrix} \cdot \hat{n} \; dS_x \, dt$$

$$- \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} \left[u \cdot \varphi_t + \sum_{j=1}^{d} f^j(u) \cdot \varphi_{x_j} \right) dx\, dt$$

Así,

$$(3) \ldots \quad \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} \left(u \cdot \varphi_t + \sum_{j=1}^{d} f^j(u) \cdot \varphi_{x_j} \right) dx\, dt \; +$$

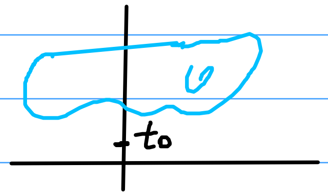
$$+ \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x,0) \cdot u_0(x) \, dx = 0$$

__Definición__ Una función $u \in L^\infty(\mathbb{R}^d \times (0,\infty); \mathcal{U})$ es una solución débil de (1) con condición inicial $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ si u satisface (3) para toda función de prueba $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$.

Observaciones:

(a) Toda solución clásica $u \in C^1(\mathbb{R}^d \times (0,\infty))$ es solución débil (por construcción).

(b) Si $\operatorname{supp} \varphi \subset U \subset \{t \geq t_0 > 0\}$ (lejos de $t=0$):



$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} \left(u \cdot \varphi_t + \sum_{j=1}^{d} f^j(u) \cdot \varphi_{x_j} \right) dx\, dt = 0 \qquad (4)$$