Lección 1.5: Sistemas simetrizables.

$$\text{(SLC)} \qquad u_t + \sum_{j=1}^{d} f^j(u)_{x_j} = 0 \qquad \cdots \qquad (1)$$

$$A^j(u) = D_u f^j(u) \in C^1(\mathcal{U}; \mathbb{R}^{n\times n})$$

Definición El sistema (1) es simétrico si $A^j(u)^T = A^j(u) \quad \forall\ u \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n,\ \forall\ 1 \leq j \leq d$.

Definición [simetrizabilidad en sentido de Friedrichs] El sistema (1) es simetrizable si $u \in \mathcal{U}$ existe una matriz $S = S(u) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, definida positiva y simétrica ($S(u) > 0$, $S(u)^T = S(u)$ $\forall\ u \in \mathcal{U}$) tal que

$$\hat{A}^j(u) := S(u) A^j(u), \qquad j = 1, \ldots, d$$

son matrices simétricas $\forall\ u \in \mathcal{U}$. A la matriz S se le conoce como el simetrizador del sistema (1).

$$\text{Simetrizabilidad} \quad \Rightarrow \quad \text{Hiperbolicidad}$$
$$\Leftarrow$$
sólo si $d=1$

Lema Si el sistema (1) es simetrizable entonces es hiperbólico.

Demostración Suponiendo (1) simetrizable, sea $S(u)$ el simetrizador, y definimos

$$\hat{A}(u,\xi) := S(u)\,\overbrace{A(u,\xi)}$$

$$= S(u) \sum_{j=1}^{d} \xi_j A^j(u) \qquad u \in \mathcal{U},\ \xi \in \mathbb{R}^d,\ \xi \neq 0$$

$\therefore$ $\hat{A}(u,\xi)$ es real y simétrica.
$\Rightarrow$ su espectro es real.

$S(u) > 0$, real y simétrica $\Rightarrow$ $w^* S(u)\, w > 0$ $\forall\, w \in \mathbb{C}^n$, $w \neq 0$, $\forall\, u \in \mathcal{U}$.

Sea $w \in \mathbb{C}^n$, vector propio de $A(u,\xi)$ con valor propio $\lambda \in \mathbb{C}$; $w \neq 0$. Entonces

$$Aw = S^{-1} \hat{A} w = \lambda w \iff \hat{A} w = \lambda S w.$$

Sea $r := w^* S w > 0$. Por lo tanto

$$\lambda r = w^* (\lambda S w) = w^* \hat{A} w = (\hat{A} w)^* w = (\lambda S w)^* w$$
$$= \lambda^* w^* S w$$
$$= \lambda^* r$$

$\hat{A}^T = \hat{A}$ $\qquad$ $S^T = S$

Como $r \neq 0$ concluimos que $\lambda \in \mathbb{R}$.

El espectro de $A = A(u,\xi)$ es real.

$A(u,\xi) = S(u)^{-1} \hat{A}(u,\xi)$ tiene espectro real.

$S \geq 0,\ S^T = S \quad \Rightarrow \quad \exists!\ S^{1/2} > 0$, simétrica tal que $S^{1/2} S^{1/2} = S$ $\forall\, u \in \mathcal{U}$.

$SA = \hat{A}$ simétrica $\Rightarrow$ $M := S^{1/2} A S^{-1/2}$ es simétrica.

En efecto,

$$M^T = \left(S^{-1/2} S A S^{-1/2}\right)^T = \left(S^{-1/2}\right)^T (SA)^T \left(S^{-1/2}\right)^T$$

$$= S^{-1/2} S A S^{-1/2} = M$$

M simétrica $\Rightarrow$ diagonalizable.

$\therefore \exists\ R$ invertible tal que R diagonaliza a M.

Así, $\tilde{R} := R S^{1/2}$ diagonaliza a A (con espectro real).

$\square$

Ejemplos:

(A) Ecuación de Burgers compleja:

$$\begin{aligned} v_t + \tfrac{1}{2}(w^2 - v^2)_x &= 0 \\ w_t + (vw)_x &= 0 \end{aligned} \qquad \cdots (2)$$

sistema de 2×2: $\quad u = \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix},\ f(u) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(w^2 - v^2) \\ vw \end{pmatrix}$

Jacobiano: $A(u) = \begin{pmatrix} -v & w \\ w & v \end{pmatrix}$ simétrica.

$\Rightarrow$ (2) es un sistema simétrico, hiperbólico.

Generalización: ecuación escalar

$$\tilde{u}_t + \tilde{f}(\tilde{u})_x = 0, \qquad x \in \mathbb{R}, \ t > 0$$

con
$$\tilde{u} := v(x,t) + i w(x,t) \quad \in \mathbb{C}$$
$$\underline{\tilde{f}(\tilde{u}) := \frac{1}{2}(w^2 - v^2) - i v w} \quad \in \mathbb{C}$$ Burgers compleja
$$=: f_1(v,w) + i f_2(v,w)$$

Nótese que
$$\partial_w f_1 = -\partial_v f_2$$
$$\partial_v f_1 = \partial_w f_2$$
Cauchy-Riemann

Suponemos, en general, $f = f(z)$ analítica, $z \in \mathbb{C}$, $u = u(z,t)$, $(z,t) \in \mathbb{C} \times [0,\infty)$.

Sea la ecuación

$$\partial_t u^* + \partial_z f(u) = 0 \qquad \cdots (3)$$

$$\partial_z := \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y)$$

$z = x + iy$
$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z$

Si $u := v(x,y,t) + i w(x,y,t)$
$f := f_1(v,w) + i f_2(v,w)$
entonces

(3) es equivalente al sistema

$$(3')\cdots \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}_t + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} f_1(v,w) \\ -f_2(v,w) \end{pmatrix}_x + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} f_2(v,w) \\ f_1(v,w) \end{pmatrix}_y = 0$$

$d=2$, $n=2$. Jacobianos:

$$A^1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \partial_v f_1 & \partial_w f_1 \\ -\partial_v f_2 & -\partial_w f_2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \partial_v f_2 & \partial_w f_2 \\ \partial_v f_1 & \partial_w f_1 \end{pmatrix}$$

Cauchy-Riemann $\Rightarrow$ A^1, A^2 son simétricos.

(B) Ecuaciones de Euler, caso barotrópico, $d=1$.

$$(4)\cdots \begin{cases} \rho_t + (\rho v)_x = 0 \\ (\rho v)_t + (\rho v^2 + \hat{p}(\rho))_x = 0 \end{cases}$$

$\rho > 0$, $\hat{p} = \hat{p}(\rho) > 0$, $\hat{p}'(\rho) > 0$.

$$u = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

$$f(u) = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho v^2 + \hat{p}(\rho) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 \\ \frac{u_2^2}{u_1} + \hat{p}(u_1) \end{pmatrix}$$

Jacobiano

$$A(u) = D_u f(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{u_2^2}{u_1^2} + \hat{p}'(u_1) & \frac{2u_2}{u_1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -v^2 + \hat{p}'(\rho) & 2v \end{pmatrix}$$

Sea

$$S(u) := \begin{pmatrix} \hat{p}'(\rho) + v^2 & -v \\ -v & 1 \end{pmatrix}$$

$$S(u) = S(u)^T, \quad S(u) > 0.$$

S es un simetrizador de (4):

$$S(u)A(u) = \begin{pmatrix} -v(\hat{p}'(\rho) - v^2) & \hat{p}'(\rho) - v^2 \\ \hat{p}'(\rho) - v^2 & v \end{pmatrix}$$

simétrica.

conclusión : (4) es simetrizable ($\Rightarrow$ hiperbólico)

Ejercicio: Demostrar que si $d=1$ entonces todo sistema hiperbólico es simetrizable.

Si $d \geq 2$ hay contraejemplo.

Contraejemplo (Lax, CPAM 11 (1958))
Sea

$$u_t + A_0 u_x + B_0 u_y = 0 \quad \cdots (5)$$

con $u \in \mathbb{R}^3$ (es decir, $n=3$, $d=2$), con

$$A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

simétricas y constantes.

(5) es simétrico, hiperbólico y lineal.
$\forall\ \xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2$, $|\xi| = 1$ el símbolo

$$\xi_1 A_0 + \xi_2 B_0 = A(\xi)$$

tiene como valores propios $-1, 0, +1$

El conjunto de matrices con valores propios reales y distintos es <u>abierto</u>.

$\therefore\ \forall\ C \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, $\forall\ 0 < \varepsilon \ll 1$ todas las combinaciones

$$\xi_1 A_0 + \xi_2 (B_0 + \epsilon C)$$

también son estrictamente hiperbólicas.

Sea

(6) ... $\quad u_t + A_0 u_x + (B_0 + \varepsilon C) u_y = 0$

$$0 < \varepsilon \ll 1$$

Idea: seleccionar C de modo que (6) <u>no</u> es simetrizable.

Por contradicción: $\exists$ S simetrizador

$$\underbrace{SA_0}_{} \text{ simétrica}$$
$$SB = S(B_0 + \epsilon C) \quad ''$$

$$\Rightarrow \quad SA_0S^{-1} \text{ simétrica}$$
$$SBS^{-1} \quad ''$$

Sea Q unitaria, $Q^TQ = I$, tal que diagonaliza a SA_0S^{-1}. Definimos

$$T := S^{-1}Q$$
$$\tilde{A} := T^{-1}A_0T$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{A} = Q^{-1}SA_0S^{-1}Q \quad \text{es diagonal.}$$

$\tilde{A}$, A_0 son similares y diagonales, mismo espectro $\Rightarrow$ podemos suponer que $\tilde{A} = A_0$*

* valores propios no están en el mismo orden pero se puede escribir $\tilde{A} = A_0$ mediante una transformación unitaria de cambio de base que se incorpora a T.

Concluimos que $\quad T^{-1}A_0T = A_0$

$$\Rightarrow \quad T, A_0 \text{ conmutan.}$$

$\therefore$ T tiene los mismos vectores propios que A_0 y por ende T también es diagonal.

$$T = \begin{pmatrix} t_1 & & \\ & t_2 & \\ & & t_3 \end{pmatrix} = \text{diag}(t_1, t_2, t_3)$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{13} \\ \vdots & & \\ b_{31} & \cdots & b_{33} \end{pmatrix}$$

Sabemos que SBS^{-1} es simétrica.

Q unitaria $\Rightarrow$ $T^{-1}BT = Q^T SBS^{-1} Q$ simétrica.

T diagonal $\Rightarrow$ $T^{-1}BT$ es simétrica ssi $b_{21}b_{32}b_{13} = b_{12}b_{23}b_{31}$

$$\Updownarrow$$

$B = B_0 + \varepsilon C$ $\therefore$

$$c_{32}c_{13} + \varepsilon c_{21}c_{32}c_{13} = c_{23}c_{31} + \varepsilon c_{12}c_{23}c_{31}$$

Tomando $0 < \varepsilon \ll 1$, $c_{32}c_{13} \neq c_{23}c_{31}$ obtenemos una contradicción.

$\therefore$ (6) no es simetrizable