Lección 1.4: Hiperbolicidad (continuación). Simetrizabilidad.

(SLC): $$u_t + \sum_{j=1}^{d} f^j(u)_{x_j} = 0 \quad \cdots \quad (1)$$

Notación: $A^j(u) = D_u f^j(u) \quad 1 \leq j \leq d$

$f^j \in C^2(\mathcal{U}; \mathbb{R}^n) \implies A^j \in C^1(\mathcal{U}; \mathbb{R}^{n\times n})$

$\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ abierto, convexo

Hiperbolicidad en $\mathcal{U}$: si $\forall u \in \mathcal{U}$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^d$, $\xi \neq 0$, la matriz

$$A(u,\xi) := \sum_{j=1}^{d} \xi_j A^j(u) \quad \cdots \quad (2)$$

es diagonalizable sobre $\mathbb{R}$.

<u>Observación</u> (hiperbolicidad estricta)
Si el sistema (1) es estrictamente hiperbólico:

$$\lambda_1(u,\xi) < \cdots < \lambda_n(u,\xi)$$

$$\lambda_j(u,\xi) \neq \lambda_i(u,\xi) \quad \forall\, i \neq j, \quad \forall u \in \mathcal{U}, \forall \xi \neq 0$$

entonces existen vectores propios $r_j = r_j(u,\xi) \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, $1 \leq j \leq n$, que generan todo $\mathbb{R}^n$ que satisfacen

$$\underbrace{A(u,\xi)}_{n\times n}\, \underbrace{r_j(u,\xi)}_{n\times 1} = \lambda_j(u,\xi)\, r_j(u,\xi)$$

Introducimos también los vectores propios izquierdos, $l_j(u,\xi) \in \mathbb{R}^{1\times n}$ tales que

$$\underbrace{l_j(u,\xi)}_{1\times n}\ \underbrace{A(u,\xi)}_{n\times n} = \lambda_j(u,\xi)\, l_j(u,\xi)$$

$\forall\ 1 \leq j \leq n$, $\forall\ u \in \mathcal{U}$, $\forall\ \xi \in \mathbb{R}^q$, $\xi \neq 0$.

También se cumple $l_k(u,\xi)\, r_j(u,\xi) = 0$ $\forall\ j \neq k$. Ya que

$$\lambda_k(l_k r_j) = l_k A r_j = l_k \lambda_j r_j = \lambda_j (l_k r_j)$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{(\lambda_k - \lambda_j)}_{\neq 0\ k\neq j}\, l_k r_j = 0$$

También $l_j r_j \neq 0$.

El siguiente resultado es útil.

(SLC) $\qquad\qquad$ sistema cuasi-lineal

$$u_t + \sum_{j=1}^{d} f^j(u)_{x_j} = 0 \quad \not\equiv \quad u_t + \sum_{j=1}^{d} A^j(u) u_{x_j} = 0$$

Lema 1 Sea $u \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$. Sea

$$\Phi : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$$

un difeomorfismo suave sobre su rango ($\Phi : \mathcal{U} \to \Phi(\mathcal{U})$ es inyectiva y sobre con derivadas continuas). Inversa: Φ^{-1}.

Entonces el sistema (1) es hiperbólico si y sólo si $W := \Phi(u)$ satisface el sistema hiperbólico cuasi-lineal

$$W_t + \sum_{j=1}^{d} \tilde{A}^j(W) W_{x_j} = 0 \quad \cdots (3)$$

en $\mathbb{R}^d \times [0,\infty) \ni (x,t)$, donde

$$\tilde{A}^j(W) = D_u\Phi(\Phi^{-1}(W))\, A^j(\Phi^{-1}(W)) D_W \Phi^{-1}(W)$$

$\forall u \in \mathcal{U}, \ \forall W \in \Phi(\mathcal{U})$.

Prueba Sea $u \in \mathcal{U}$. (1) hiperbólico entonces $A(u,\xi)$ es diagonalizable sobre $\mathbb{R}$.

Definiendo $W := \Phi(u)$ entonces $u = \Phi^{-1}(W)$ y

$$u_t = D_W \Phi^{-1}(W) W_t$$
$$u_{x_j} = D_W \Phi(W) W_{x_j}$$

sustituyendo en

$$u_t + \sum_{j=1}^{d} A^j(u) u_{x_j} = 0 \quad \cdots (4)$$

obtenemos

$$D_W \Phi^{-1}(W) W_t + \sum_{j=1}^{d} A^j(\Phi^{-1}(W)) D_W \Phi^{-1}(W) W_{x_j} = 0$$

$$\cdots (5)$$

En virtud de que $\left(D_w \Phi^{-1}(w)\right)^{-1} = D_u \Phi\left(\Phi^{-1}(w)\right)$ obtenemos (3).

sistema (4) es hiperbólico ssi (3) es hiperbólico ya que

$$A(u,\xi) \quad y \quad \tilde{A}(w,\xi) = \sum_{j=1}^{d} \xi_j \tilde{A}^j(w)$$

son similares :

$$\tilde{A}(\Phi(u),\xi) = D_u\Phi(u) A(u,\xi) \left(D_u \Phi(u)\right)^{-1}$$

$\Rightarrow$ $A(u,\xi)$ diagonalizable sobre $\mathbb{R}$ ssi $\tilde{A}(w,\xi)$ " " " .

$$\tilde{\lambda}_j(w,\xi) = \lambda_j\left(\Phi^{-1}(w), \xi\right) \quad \forall\, u \in \mathcal{U},\ w \in \Phi(\mathcal{U}) \quad \forall\, \xi \neq 0.$$

$\square$

<u>Ejemplos de sistemas hiperbólicos</u>

(A) Toda ley de conservación escalar es hiperbólica :

$$u_t + \sum_{j=1}^{d} f^j(u)_{x_j} = 0$$

$u \in \mathbb{R}$, $f^j : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$, $a_j(u) = \dfrac{df^j}{du} \in \mathbb{R}$

única velocidad característica

$$\lambda(u,\xi) = \sum_{j=1}^{d} \xi_j\, a_j(u) \qquad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \quad \forall\, u \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}.$$

(B) El sistema p.

$p: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, • $p'(v) < 0$
• $p''(v) > 0$

$$\begin{aligned} v_t - u_x &= 0 \\ u_t + p(v)_x &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &x \in \mathbb{R},\ d=1 \\ &t>0 \end{aligned}$$

$U = \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, $n=2$.

$f(U) = \begin{pmatrix} -u \\ p(v) \end{pmatrix}$. Jacobiano:

$$A(U) = A(v,u) = Df(v,u)$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ p'(v) & 0 \end{pmatrix}$$

claramente $\det(A(U) - \lambda I) =$

$$= \lambda^2 + p'(v) = 0$$

$\Rightarrow \quad \lambda_1 = -\sqrt{-p'(v)} < 0 < \lambda_2 = \sqrt{-p'(v)}$

$v>0$ $\therefore$ el sistema p es estricta-mente hiperbólico.

Vectores propios: $r_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{-p'(v)} \end{pmatrix}$, $r_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{-p'(v)} \end{pmatrix}$

$\updownarrow$ $\lambda_1 = -\sqrt{-p'(v)}$ $\qquad$ $\updownarrow$ $\lambda_2 = +\sqrt{-p'(v)}$

Así,
$$\ell_1 = \left(\sqrt{-p'(v)} \quad 1 \right)$$
$$\ell_2 = \left(-\sqrt{-p'(v)} \quad 1 \right)$$

(c) Ecuaciones de Euler en <u>una</u> dim.

$$p = \hat{p}(\rho, e) \qquad \text{ecuación de estado:}$$

Hipótesis:
- $\hat{p} > 0$
- $\hat{p}_\rho > 0$
- $\hat{p}_e > 0$

Ejercicio: el sistema de Euler es equivalente al sistema cuasi-lineal:

$$(6).- \begin{cases} \rho_t + u\rho_x + \rho u_x = 0 \\ u_t + uu_x + \frac{1}{\rho}\hat{p}_x = 0 \\ e_t + ue_x + \frac{1}{\rho}\hat{p}\,u_x = 0 \end{cases}$$

(no es conservativo).

$$\hat{p}_x = \hat{p}_\rho \rho_x + \hat{p}_e e_x$$

El sistema (6) es de la forma

$$W_t + A(W)W_x = 0$$

donde

$$W = \begin{pmatrix} \rho \\ u \\ e \end{pmatrix}, \qquad A(W) = \begin{bmatrix} u & \rho & 0 \\ \frac{1}{\rho}\hat{p}_\rho & u & \frac{1}{\rho}\hat{p}_e \\ 0 & \frac{1}{\rho}\hat{p} & u \end{bmatrix}$$

Así,

$$\det\left(A(W) - \lambda I\right) = (u-\lambda)\left[(u-\lambda)^2 - \frac{1}{\rho^2}\hat{p}_e\hat{p}\right] + - \hat{p}_\rho (u-\lambda)$$

$$= (u-\lambda)\left((u-\lambda)^2 - \frac{1}{\rho^2}\hat{p}_e\hat{p} - \hat{p}_\rho\right)$$

Denotamos

$$c^2 := \hat{p}_\rho + \frac{1}{\rho^2}\hat{p}\,\hat{p}_e > 0$$

por hipótesis, $\rho > 0$.

$c > 0$ – velocidad del sonido.

Velocidades características:

$$\lambda_1 = u - c < \lambda_2 = u < \lambda_3 = u + c$$

El sistema de Euler (por el lema) en $d=1$ es estrictamente hiperbólico.

Ejercicio: (a) Verificar hiperbolicidad de el sistema conservado.

(b) verificar la hiperbolicidad en dimensión $d \geq 2$. No es estrictamente hiperbólico.

Existencia local

Teorema Sea el problema de Cauchy

$$(7) \cdots \begin{cases} u_t + \sum_{j=1}^{d} A^j(u) u_{x_j} = 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases}$$

con $x \in \mathbb{R}^d$, $t>0$, $d \geq 1$, $u(x,t) \in \mathbb{R}^n$, $A^j(u) \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^{n\times n})$, simétrica $\forall j$.
Si $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^d)^n$ con $s > d/2 + 1$ entonces existe $T>0$ tal que el problema (7) tiene una única solución $u \in C^1([0,T]; H^s(\mathbb{R}^d)^n)$

observaciones : • son soluciones clásicas (Lema de Sobolev) a (7)
$\Rightarrow$ soluciones clásicas de (1).
• la existencia es local : $[0,T]$.