Lección 1.3: Modelo de tráfico de LWR.

(B) Modelo de tráfico de Lighthill-Whitham-Richards ($\sim$ 1955)

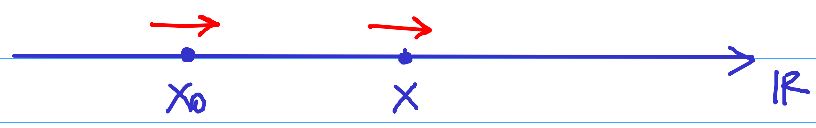
Modelo hidrodinámico:

- $0 \le \rho = \rho(x,t)$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$ aproxima el no. de autos por unidad de longitud en una carretera ($x \in \mathbb{R}$) en la posición x a tiempo t (densidad de masa vehicular)

- $\mathbb{R}$ - carretera (o autopista) sin entradas ni salidas (un sólo sentido).

- $\tilde{F} = \tilde{F}(x,t)$ función de flujo: cantidad de autos que pasan por $x \in \mathbb{R}$, a tiempo t por unidad de tiempo.

- condición inicial: $\rho(x,0) = \rho_0(x)$ función conocida.



$x_0, x \in \mathbb{R}$ arbitrarios

"Masa" vehicular total entre x_0 y x a tiempo $t > 0$:

$$M(t) = \int_{x_0}^{x} \rho(\xi, t)\, d\xi$$

$$\frac{dM}{dt} = \int_{x_0}^{x} \rho_t(\xi,t)\, d\xi$$

= # de autos que "entran" en x_0 por unidad de tiempo

− # de autos que "salen" en x por unidad de tiempo.

$$= \tilde{F}(x_0,t) - \tilde{F}(x,t)$$

$\tilde{F}$ tiene unidades de $\dfrac{[M]}{[T]}$

ρ " " " $\dfrac{[M]}{[L]}$

Observación:
- si $\rho \approx 0^+$ entonces claramente $\tilde{F} \approx 0$
- si $\rho \approx \rho_{max}^-$ " " $\tilde{F} \approx 0$

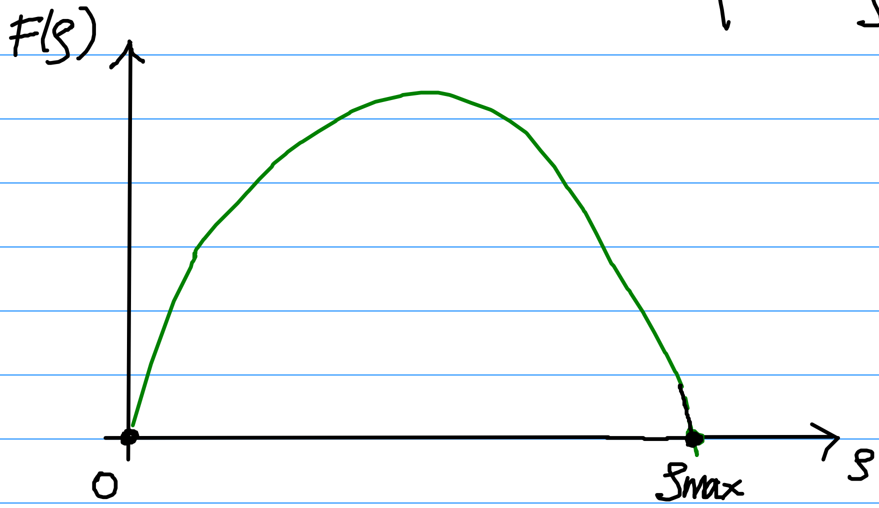
$\rho_{max} > 0$ constante asociada a la capacidad de la autopista.

Propuesta:

$$\begin{cases} \tilde{F}(x,t) = F(\rho(x,t)) \\ F(0) = 0, \quad F(\rho_{max}) = 0 \end{cases}$$

LWR : perfil parabólico

$$F(\rho) = K\rho\left(1 - \frac{\rho}{\rho_{max}}\right) \quad \cdots (1)$$



Flujo máximo en $\rho_* = \frac{1}{2}\rho_{max}$.

Sustituyendo:

$$\frac{dM}{dt} = \int_{x_0}^{x} \rho_t(\xi, t)\, d\xi$$

$$= F(\rho(x_0, t)) - F(\rho(x,t))$$

$$= -\int_{x_0}^{x} \frac{\partial}{\partial \xi} F(\rho(\xi, t))\, d\xi$$

$$\Rightarrow \int_{x_0}^{x} \left[\rho_t(\xi,t) + F(\rho(\xi,t))_\xi\right] d\xi = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_{x_0}^{x} \rho_t(\xi,t)\, d\xi = F(\rho(x_0,t)) - F(\rho(x,t))$$

ley de conservación (forma integral) $\cdots (2)$

$x, x_0 \in \mathbb{R}$ arbitrarios $\therefore$ derivando,

$$\rho_t + F(\rho)_x = 0 \quad \cdots \quad (3)$$

Modelo de LWR.

$$u(\rho) := \frac{F(\rho)}{\rho} \qquad \rho \in [0, \rho_{max}]$$

$$[u] = \frac{[F]}{[\rho]} = \frac{\cancel{[M]}}{[T]} \cdot \frac{[L]}{\cancel{[M]}} = \underbrace{\frac{[L]}{[T]}}_{\text{velocidad.}}$$

Velocidad euleriana : velocidad promedio de los autos cuando la densidad es igual a $\rho \in [0, \rho_{max}]$.

$$\Rightarrow \quad u(\rho) = \frac{F(\rho)}{\rho} = K \underbrace{\left(1 - \frac{\rho}{\rho_{max}}\right)}_{\text{adimensional}} \leq K \quad \text{si } \rho \leq \rho_{max}$$

$$[K] = \frac{[L]}{[T]} \quad \text{velocidad}$$

$$u_{max} := K > 0 \quad \text{límite de velocidad.}$$

Modelo de LWR :

$$(4) \cdots \begin{cases} \rho_t + F(\rho)_x = 0 \\ F(\rho) = u_{max}\left(1 - \frac{\rho}{\rho_{max}}\right) \end{cases}$$

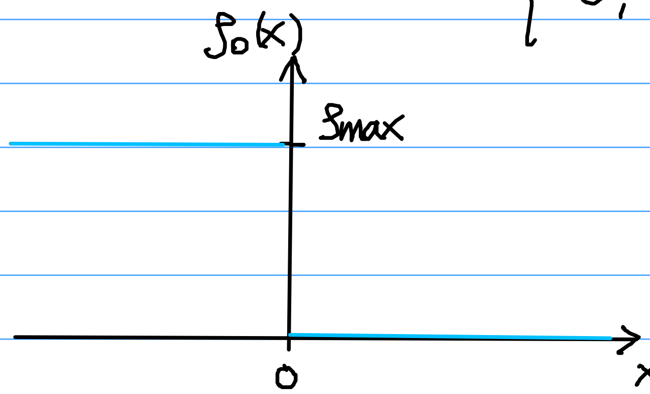
$\rho_{max} > 0$, $v_{max} > 0$ constantes.

Problema de Cauchy: (4) con

$$\rho(x,0) = \rho_0(x) \qquad \cdots \quad (5).$$

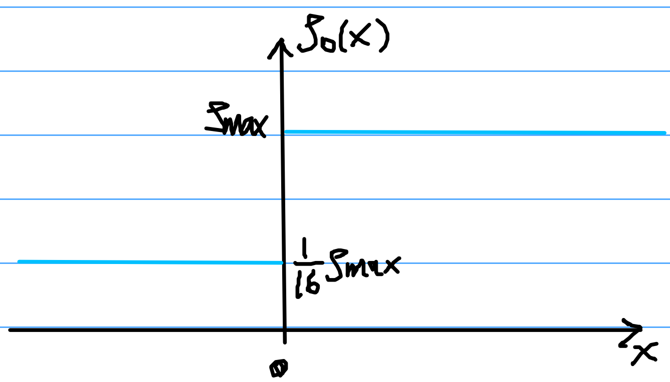
Ejemplo:

(a) $$\rho_0(x) = \begin{cases} \rho_{max}, & x<0 \\ 0, & x>0 \end{cases}$$



Luz roja → verde

(b) $$\rho_0(x) = \begin{cases} \frac{1}{16}\rho_{max}, & x<0 \\ \rho_{max}, & x>0 \end{cases}$$



Luz verde → roja

(C) Ecuaciones de agua poco profunda

(D) Materiales hiperelásticos

(E) Termoelasticidad adiabática

(F) Magnetohidrodinámica (MHD)

(G) Electroporesis

(H) Sistema "p".

$$(6)\ldots \quad \begin{cases} v_t - w_x = 0 \\ w_t + p(v)_x = 0 \end{cases}$$

$p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $p \in C^2$, $p'(v) < 0$ $\forall v \in \mathbb{R}$
$p''(v) > 0$

$n = 2$, $d = 1$ $\quad U = \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

$f(U) = \begin{pmatrix} -w \\ p(v) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

Aplicaciones : • mecánica de fluidos
v – vol. específico
w – vel.
p – presión

• elasticidad : $p = -\sigma$ $\quad \sigma$ – esfuerzo ("stress")
v – desplazamiento $\quad v = \partial_x X$
w – vel. local $\quad w = \partial_t X$.

- Fermi - Pasta - Ulam

$$\psi_{tt} + p(\psi_x)_x = 0$$

$$c = \sqrt{-p'(\psi_x)} \qquad p' < 0$$

$$v = \psi_x, \quad w = \psi_t \quad \Rightarrow (6).$$

Hiperbolicidad

Teoría básica de EDPs :

$$(1) \cdots \begin{cases} u_t + A u_x = 0, & x \in \mathbb{R}, \ t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x), \end{cases}$$

$$u \in \mathbb{R}^n, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

(1) tiene una solución ssi A es diagonalizable sobre $\mathbb{R}$.

$$A = S \Lambda S^{-1} \qquad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$S^{-1} A S = \Lambda$$

$$v = S^{-1} u \qquad v_x = S^{-1} u_x$$

$$v_t = S^{-1} u_t$$

$$(1) \Rightarrow \quad S^{-1} u_t + S^{-1} A S v_x = 0$$

$$\Rightarrow \quad v_t + \Lambda v_x = 0.$$

$$\partial_t v_j + \lambda_j \partial_x v_j = 0$$

$$v(x,0) = S^{-1} u(x,0)$$

$$v_j = \psi_j(x - \lambda_j t)$$ onda viajera.

Sistema de leyes de conservación:

$$u_t + \sum_{j=1}^{d} f^j(u)_{x_j} = 0 \quad \cdots (2)$$

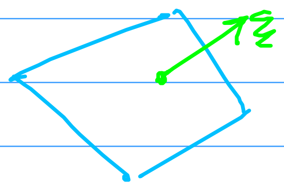
$f^j \in C^2(\mathcal{U}; \mathbb{R}^n)$ $\qquad \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$

$A^j(u) := Df^j(u) \in C^1(\mathcal{U}; \mathbb{R}^{n\times n})$

$$(2) \iff u_t + \sum_{j=1}^{d} A^j(u)\, u_{x_j} = 0$$

forma cuasilineal

Suponemos: $u(x,t) = \psi(x\cdot\xi - st)$



$\xi \in \mathbb{R}^d$, $\xi \neq 0$

$s \in \mathbb{R}$ velocidad

sustituyendo:

$$-s\psi'(x\cdot\xi - st) + \sum_{j=1}^{d} \xi_j A^j(\psi(x\cdot\xi - st))\psi'(x\cdot\xi - st) = 0$$

Definiendo:

$$A(u,\xi) := \sum_{j=1}^{d} \xi_j A^j(u)$$

$$u \in \mathcal{U}, \quad \xi \in \mathbb{R}^d$$

$$A(u,\xi)\,\psi' = s\,\psi'$$

<u>Definición</u> (hiperbolicidad)

El (SLC) (2) es hiperbólico en el estado $u \in \mathcal{U}$ si $\forall\, \xi \in \mathbb{R}^d$, $\xi \neq 0$ la matriz

$$A(u,\xi) = \sum_{j=1}^{d} \xi_j A^j(u)$$

es diagonalizable sobre $\mathbb{R}$: sus valores propios son reales y semi-simples,

$$\lambda_1(u,\xi) \leq \lambda_2(u,\xi) \leq \cdots \leq \lambda_n(u,\xi)$$

(velocidades características).

Si (2) es hiperbólico en u, $\forall u \in \mathcal{U}$, entonces es hiperbólico en $\mathcal{U}$.

(2) es estrictamente hiperbólico si los valores propios son todos distintos

$$\lambda_1(u,\xi) < \cdots < \lambda_n(u,\xi)$$