Lección 1.16 : Límite de aproximación viscosa: viscosidad real.

(SLC) :

$$(1)\quad \begin{cases} u_t + \displaystyle\sum_{j=1}^{d} f^j(u)_{x_j} = 0, & x \in \mathbb{R}^d,\ t>0 \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^d \end{cases}$$

Problema viscoso :

$$(8)\ldots \begin{cases} u_t + \displaystyle\sum_{j=1}^{d} f^j(u)_{x_j} = \varepsilon \sum_{i,k=1}^{d} \left(B^{ik}(u)\, x_i\right)_{x_k} \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases}$$

$u_0 \in C(\mathbb{R}^d; \mathcal{U}) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d; \mathcal{U})$ misma condición inicial de (1).

Sea (E, Ψ) par de entropía de (1) tal que :

- $E \in C^2(\mathcal{U}; \mathbb{R})$, $\Psi^j \in C^1(\mathcal{U}; \mathbb{R})$, $1 \leq j \leq d$
- $D^2 E \geq \delta > 0 \quad \forall\, u \in \mathcal{U}$ (estrictamente convexa)
- $(DE)^T A^j = (D\Psi^j)^T, \quad \forall\, 1 \leq j \leq d, \ \forall\, u \in \mathcal{U}$

$A^j(u) := Df^j(u), \quad u \in \mathcal{U}$

cálculo: sea u^ε solución suave de (8), entonces

$$E(u^\varepsilon)_t + \sum_{j=1}^{d} \Psi^j(u^\varepsilon)_{x_j} =$$

(10) ...
$$= \varepsilon \sum_{i,k=1}^{d} \left(DE(u^\varepsilon)^T B^{ik}(u^\varepsilon) u^\varepsilon_{x_i} \right)_{x_k} + \qquad 1$$

$$- \varepsilon \underbrace{\sum_{i,k=1}^{d} u^\varepsilon_{x_k} D^2E(u^\varepsilon) B^{ik}(u^\varepsilon) u^\varepsilon_{x_i}}_{\text{forma cuadrática}} \qquad 2$$

$\forall \varepsilon > 0$.

Pediremos 2 def. positiva y "domine" a 1.

Definición (condición de disipación de entropía)

Para cualesquiera $\omega_i \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, $1 \leq i \leq d$, y $\forall u \in \mathcal{U}$ se debe cumplir

(11) ...
$$\sum_{i,k=1}^{d} \omega_i^T D^2E(u) B^{ik}(u) \omega_k \geq$$

$$\geq \theta \sum_{i=1}^{d} \Big| \sum_{k=1}^{d} B^{ik}(u) \omega_k \Big|^2$$

con $\theta > 0$ constante uniforme.

Observación: En el caso $B^{ik} \equiv \delta_i^k$ (11) es

$$\sum_{i=1}^{d} \omega_i^T D^2E(u) \omega_i \geq \theta \sum_{i=1}^{d} |\omega_i|^2$$

es decir, convexidad estricta de E.

Más hipótesis: por simplicidad el dato inicial tiende exponencialmente a un límite

$$(9)\ldots \qquad |u_0(x) - u_*| \leq C e^{-\eta|x|}$$

para $C>0$, $\eta>0$, con $u_* \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ constante.

Finalmente, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $u_* \in \mathcal{U}$ es un mínimo global de E:

$$(12)\ldots \begin{cases} E(u) \geq E(u_*) & \forall u \in \mathcal{U} \\ E(u_*) = 0, \quad DE(u_*) = 0 \end{cases}$$

En efecto, es posible demostrar:

<u>Lema</u> Si (E, Ψ) es un par de entropía de (1), $E \in C^2$, $\Psi \in C^1$ con $D^2E \geq \delta > 0$, entonces el par normalizado

$$\tilde{E}(u) := E(u) - E(u_*) - DE(u_*)^T (u - u_*)$$

$$\tilde{\Psi}^j(u) := \Psi^j(u) - \Psi^j(u_*) - DE(u_*)^T (f^j(u) - f^j(u_*))$$

$$1 \leq j \leq d$$

es también un par de entropía de (1) que satisface (12). Aquí $u_* \in \mathcal{U}$ es arbitrario.

<u>Dem.</u> Ejercicio. $\square$

Teorema 2 Sea $u^\varepsilon = u^\varepsilon(x,t)$ la solución suave al problema de Cauchy viscoso (8) con $\varepsilon > 0$ y con $u_0 \in C \cap L^\infty$. Suponiendo que:

(a) $\|u^\varepsilon\|_{L^\infty} \leq C$, $\forall \varepsilon > 0$, $C > 0$ uniforme
(principio del máximo)

(b) $u^\varepsilon \longrightarrow u$ c.d.s. en $\mathbb{R}^d \times (0,\infty)$ cuando $\varepsilon \to 0^+$

(c) Para cada $t > 0$ fijo

$$\left.\begin{array}{l} |u^\varepsilon - u_*| \\ |\nabla u^\varepsilon| \end{array}\right\} \longrightarrow 0$$ exponencialmente rápido si $|x| \to \infty$

cuando $\varepsilon \to 0^+$.

(d) El sistema viscoso satisface la condición de disipación de entropía (11) para el par (E, Ψ) que satisface (12).

Entonces, el límite de aproximación viscosa

$$u(x,t) := \lim_{\varepsilon \to 0^+} u^\varepsilon(x,t) \quad \text{c.d.s. en } (x,t) \in \mathbb{R}^d \times (0,\infty)$$

es solución débil del sistema hiperbólico (1) que además satisface la desigualdad de entropía con respecto al par (E, Ψ).

<u>Demostración</u> : Comenzamos con una observación. Integrando (10) :

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} E(u^\varepsilon)_t + \sum_{j=1}^d \Phi^j(u^\varepsilon)_{x_j} \, dx\, dt$$

$$= \varepsilon \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{i,k=1}^d \left(DE(u^\varepsilon)^T B^{ik}(u^\varepsilon) u^\varepsilon_{x_i}\right)_{x_k} dx\,dt$$

$$- \varepsilon \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{i,k=1}^d (u^\varepsilon_{x_i})^T D^2E(u^\varepsilon) B^{ik}(u^\varepsilon) u^\varepsilon_{x_k} \, dx\,dt$$

Como $u^\varepsilon \to u_*$ cuando $|x| \to \infty$ $\forall\, t>0$ fijo exponencialmente, $E(u_*)=0$, $DE(u_*)=0$, $\Phi^j(u_*)=0$, obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left[\lim_{t\to\infty} E(u^\varepsilon(x,t)) - E(u^\varepsilon(x,0)) \right] dx$$

$\Phi^j(u_*)=0$

$$+ \int_0^\infty \sum_{j=1}^d \overbrace{\lim_{|x|\to\infty} \Phi^j(u^\varepsilon(x,t))}^{=0} \, dt$$

$$= \varepsilon \int_0^\infty \lim_{|x|\to\infty} \sum_{i,k=1}^d DE(u^\varepsilon)^T B^{ik}(u^\varepsilon) u^\varepsilon_{x_k} \, dt$$

$$- \varepsilon \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{i,k=1}^d (u^\varepsilon_{x_i})^T D^2E(u^\varepsilon) B^{ik}(u^\varepsilon) u^\varepsilon_{x_k} \, dx\,dt$$

Como $\lim\limits_{t\to\infty} E(u^\varepsilon(x,t)) \geq E(u_*) = 0$ obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}^d} E(u_0(x))\, dx \geq \varepsilon \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{i,k=1}^d (u^\varepsilon_{x_i})^T D^2E(u^\varepsilon) B^{ik}(u^\varepsilon) \cdot u^\varepsilon_{x_k} \, dx\,dt$$

Bajo nuestras hipótesis, multiplicamos (8) por $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R} ; \mathbb{R}^n)$ e integramos por partes :

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} \left[\phi_t \cdot u^\varepsilon + \sum_{j=1}^{d} \phi_{x_j} \cdot f^j(u^\varepsilon) \right] dx\, dt \; +$$

$$+ \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x,0) \cdot u_0(x)\, dx \; =$$

$$= \varepsilon \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{i,k=1}^{d} \phi_{x_k} \cdot B^{ik}(u^\varepsilon) u^\varepsilon_{x_i}\, dx\, dt$$

Por hipótesis : $\cdot \; \|u^\varepsilon\|_{L^\infty} \leq C$

$\cdot \; |\nabla u^\varepsilon| \to 0$ si $|x| \to \infty$

$\therefore$ el lado derecho tiende a 0 si $\varepsilon \to 0^+$.

Como $u^\varepsilon \to u$ c.d.s. obtenemos

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} \left[\phi_t \cdot u + \sum_{j=1}^{d} \phi_{x_j} \cdot f^j(u) \right] dx\, dt$$

$$+ \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x,0) \cdot u_0(x)\, dx \; = 0$$

es decir, $u = \lim u^\varepsilon$ c.d.s. es solución débil. $(u \in L^\infty)$.

Multiplicamos (10) por $\varphi \in \mathcal{D}_+ = \{ \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}; \mathbb{R}) : \varphi \geq 0 \}$.

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} \left[\varphi E(u^\varepsilon)_t + \sum_{j=1}^d \varphi \Psi^j(u^\varepsilon)_{x_j} \right] dx\, dt$$

$$\underset{(11)}{\leq} \varepsilon \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} \varphi \sum_{i,k=1}^d \left(DE(u^\varepsilon)^T B^{ik}(u^\varepsilon)\, u^\varepsilon_{x_i} \right)_{x_k} dx\,dt$$

$$- \varepsilon \theta \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} \varphi \sum_{j=1}^d \left| \sum_{k=1}^d B^{ik}(u^\varepsilon)\, u^\varepsilon_{x_k} \right|^2 dx\,dt$$

$$\leq \varepsilon \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \varphi \sum_{i,k=1}^d \left(DE(u^\varepsilon)^T B^{ik}(u^\varepsilon)\, u^\varepsilon_{x_i} \right)_{x_k} dx\,dt$$

Integrando por partes:

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} \left[\varphi_t E(u^\varepsilon) + \sum_{j=1}^d \varphi_{x_j} \Psi^j(u^\varepsilon) \right] dx\, dt \; +$$

$$+ \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x,0)\, E(u_0(x))\, dx$$

$$\geq \varepsilon \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} \left(\varphi_{x_k} DE(u^\varepsilon)^T B^{ik}(u^\varepsilon)\, u^\varepsilon_{x_i} \right) dx\,dt$$

$$\longrightarrow 0 \quad \text{si} \quad \varepsilon \to 0^+$$

obtenemos:

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} \left(\varphi_t E(u) + \sum_{j=1}^d \varphi_{x_j} \Psi^j(u) \right) dx\, dt$$

$$+ \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x,0)\, E(u_0(x))\, dx \geq 0$$

$\forall\ \varphi \in \mathcal{D}_+$ $\quad \therefore$ u es solución entrópica $\square$

$u_0 \in BV$