Lección 1.15 : Límite de aproximación viscosa (continuación).

Problema de Cauchy para un SLC :

$$(1)\cdots \begin{cases} u_t + \sum_{j=1}^{d} f^j(u)_{x_j} = 0, & x \in \mathbb{R}^d,\ t>0 \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^d \end{cases}$$

donde $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^d;\mathcal{U})$, $f^j \in C^2(\mathcal{U};\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ abierto conexo, $n \geq 1$, $d \geq 1$.

Sistema viscoso asociado (con viscosidad artificial o idéntica) :

$$(2)\cdots \begin{cases} u_t + \sum_{j=1}^{d} f^j(u)_{x_j} = \varepsilon \Delta u, & x \in \mathbb{R}^d,\ t>0 \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^d \end{cases}$$

para cada $\varepsilon > 0$. Nótese que la condición inicial en (1) y en (2) es la misma.

Por teoría de regularidad parabólica, si

$$u_0 \in C(\mathbb{R}^d;\mathcal{U}) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d;\mathcal{U})$$

entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe una única solución clásica

$$(3)\cdots \begin{cases} u^\varepsilon = u^\varepsilon(x,t) \\ u^\varepsilon \in C^2(\mathbb{R}^d \times (0,\infty)) \cap C(\mathbb{R}^d \times [0,\infty)) \end{cases}$$

del problema (2) que satisface el principio del máximo:

$$\| u^\varepsilon \|_{L^\infty(\mathbb{R}^d \times (0,\infty))} \leq C \qquad \cdots (4)$$

uniformemente en $\varepsilon > 0$, con $C > 0$ constante.

Adicionalmente, vamos a suponer que

$$u^\varepsilon \to u \quad \text{c.d.s. en } \mathbb{R}^d \times (0,\infty) \quad \text{cuando } \varepsilon \to 0^+ \qquad \cdots (5)$$

y que el sistema hiperbólico (1) admite un par de entropía (E, Ψ) con E estrictamente convexa:

$$(b) \cdots \begin{cases} (E, \Psi) \in C^2(\mathcal{U}; \mathbb{R}) \times C^1(\mathcal{U}; \mathbb{R}^{1\times d}) \\ \Psi = (\Psi^1, \dots, \Psi^d), \qquad \Psi^j \in C^1(\mathcal{U}; \mathbb{R}), \quad 1 \leq j \leq d \\ D^2E(u) \geq \delta I > 0 \qquad \text{con } \delta > 0 \ \forall u \in \mathcal{U} \\ D\Psi^j(u)^T = DE(u)^T A^j(u), \qquad \forall u \in \mathcal{U} \ \forall\, 1 \leq j \leq d \end{cases}$$

donde $A^j(u) := Df^j(u)$, $\forall u$, $\forall j$.

Tenemos el siguiente:

Teorema 1 Bajo las hipótesis anteriores, el límite

$$u(x,t) := \lim_{\varepsilon \to 0^+} u^\varepsilon(x,t) \quad \text{c.d.s. en } \mathbb{R}^d \times (0,\infty)$$

es una solución débil de (1) que, además, satisface la desigualdad de entropía

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} \left[\varphi_t E(u) + \sum_{j=1}^d \varphi_{x_j} \Psi^j(u) \right] dx\, dt \; +$$

$$+ \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x,0) E(u_0(x))\, dx \geq 0 \quad \dots (7)$$

para toda función de prueba

$$\varphi \in \mathcal{D}_+ := \left\{ \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}; \mathbb{R}) : \varphi \geq 0 \right\}$$

Lema auxiliar Sea $\{u^\varepsilon\}_{\varepsilon>0} \subset \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ una sucesión uniformemente acotada $\|u^\varepsilon\|_{L^\infty} \leq C$, $C>0$, $\forall \varepsilon > 0$, tal que $u^\varepsilon \to u$ c.d.s. en $\mathbb{R}^m$ cuando $\varepsilon \to 0^+$. Entonces para cualquier función continua $G \in C(\mathcal{U}; \mathbb{R}^p)$, $p \geq 0$, se tiene que

$$G(u^\varepsilon) \to G(u) \quad \text{en sentido de distribuciones cuando } \varepsilon \to 0^+$$

es decir, $\forall \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^p)$ se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}^m} \phi \cdot G(u^\varepsilon)\, dx \to \int_{\mathbb{R}^m} \phi \cdot G(u)\, dx$$

cuando $\varepsilon \to 0^+$.

Demostración: Se define la sucesión

$$g^\varepsilon(x) := \phi(x) \cdot G(u^\varepsilon(x)), \qquad \varepsilon > 0, \; x \in \mathbb{R}^m$$

Dado que $u^\varepsilon \to u$ c.d.s. por continuidad de G tenemos

$$g^\varepsilon \to \phi \cdot G(u) \quad \text{c.d.s. en } x \in \mathbb{R}^m \text{ si } \varepsilon \to 0^+.$$

Además, u^ε es acotada uniformemente. Por continuidad de G tenemos que

$$g(x) := \sup_{\varepsilon > 0} |g^\varepsilon(x)| \leq C \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^m$$

$\operatorname{supp} \phi$ compacto $\Rightarrow$ $\operatorname{supp} g^\varepsilon$ compacto.
Así, g es integrable

$$\int_{\mathbb{R}^m} g(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^m} \sup_{\varepsilon > 0} |\phi(x) \cdot G(u^\varepsilon(x))|$$

$$\leq C \int_{\operatorname{supp} \phi} dx < \infty$$

Por convergencia dominada:

$$\int_{\mathbb{R}^m} \phi(x) \cdot G(u^\varepsilon(x))\, dx = \int_{\mathbb{R}^m} g^\varepsilon(x)\, dx$$

$$\longrightarrow \int_{\mathbb{R}^m} \lim_{\varepsilon \to 0} g^\varepsilon(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^m} \phi(x) \cdot G(u(x))\, dx$$

cuando $\varepsilon \to 0^+$. $\square$

Demostración del Teorema 1:

Sea $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$ una función de prueba. u^ε es solución suave de (2). Mult. por ϕ e integrando:

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} \left[\phi \cdot u_t^\varepsilon + \sum_{j=1}^d \phi \cdot f^j(u^\varepsilon)_{x_j} \right] dx\, dt$$
$$= \varepsilon \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} \phi \cdot \Delta u^\varepsilon\, dx\, dt$$

Integrando por partes:

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} \left[\phi_t \cdot u^\varepsilon + \sum_{j=1}^d \phi_{x_j} \cdot f^j(u^\varepsilon) \right] dx\, dt +$$
$$+ \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x,0) \cdot \underbrace{u^\varepsilon(x,0)}_{= u_0(x)}\, dx$$
$$= -\varepsilon \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} \Delta\phi \cdot u^\varepsilon\, dx\, dt$$

Por el lema auxiliar, tomando lím cuando $\varepsilon \to 0^+$:

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} \left[\phi_t \cdot u + \sum_{j=1}^{d} \phi_{x_j} \cdot f^j(u) \right] dx\, dt \; +$$

$$+ \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x,0) \cdot u_0(x)\, dx \quad = \quad 0.$$

Además, por el principio del máximo,

$$\|u\|_{L^\infty} \leq C$$

$\Rightarrow \quad u = \lim_{\varepsilon \to 0^+} u^\varepsilon$ c.d.s. es solución débil de (1).

Por hipótesis : (E, Ψ) par de entropía de (1). u^ε solución de (2) :

$$DE(u^\varepsilon)^T u_t^\varepsilon + \sum_{j=1}^{d} DE(u^\varepsilon)^T \underbrace{f^j(u^\varepsilon)_{x_j}}_{= A^j(u^\varepsilon) u^\varepsilon_{x_j}}$$

$$= E(u^\varepsilon)_t + \sum_{j=1}^{d} \Psi^j(u^\varepsilon)_{x_j}$$

$DE^T A^j = D\Psi^{jT}$

$$= \varepsilon\, DE(u^\varepsilon)^T \Delta u^\varepsilon$$

Pero, tenemos la relación

$$\Delta E(u^\varepsilon) = \underbrace{(\nabla u^\varepsilon)^T D^2 E(u^\varepsilon) \nabla u^\varepsilon}_{\geq 0} + DE(u^\varepsilon)^T \Delta u^\varepsilon$$

obteniendo,

$$E(u^\varepsilon)_t + \sum_{j=1}^{d} \Psi^j(u^\varepsilon)_{x_j} \leq \varepsilon \, \Delta E(u^\varepsilon)$$

Multiplicando por $\varphi \in \mathcal{D}_+$ e integrando:

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} \left[\varphi \, E(u^\varepsilon)_t + \sum_{j=1}^{d} \varphi \, \Psi^j(u^\varepsilon)_{x_j} \right] dx \, dt$$

$$\leq \varepsilon \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} \varphi \, \Delta E(u^\varepsilon) \, dx \, dt$$

Integrando por partes:

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} \left[\varphi_t \, E(u^\varepsilon) + \sum_{j=1}^{d} \varphi_{x_j} \, \Psi^j(u^\varepsilon) \right] dx \, dt$$

$$+ \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x,0) \, E(u_0(x)) \, dx \geq - \varepsilon \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} \Delta\varphi \, E(u^\varepsilon)$$

Por el lema auxiliar, tomando lím cuando $\varepsilon \to 0^+$ obtenemos (7).

$\square$

El límite con viscosidad real

Sistema viscoso asociado depende de la elección de los tensores de viscosidad

$$B^{ik}(\bar{\varepsilon}, u) \in C^2(\mathbb{R}^m \times \mathcal{U}; \mathbb{R}^{n \times n})$$

$$1 \leq i, k \leq d$$

Por simplicidad, normalizamos los tensores, $\varepsilon = |\bar{\varepsilon}|$ de modo que

$$B^{ik}(\bar{\varepsilon}, u) = \varepsilon B^{ik}(u), \qquad \varepsilon > 0, \quad 1 \leq i,k \leq d$$

$$B^{ik} \in C^2(\mathcal{U}; \mathbb{R}^{n \times n}).$$

Problema de Cauchy:

$$(8) \cdots \begin{cases} u_t + \sum_{j=1}^{d} f^j(u)_{x_j} = \varepsilon \sum_{i,k=1}^{d} \left(B^{ik}(u) u_{x_i}\right)_{x_k} \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases}$$

con $u_0 \in C(\mathbb{R}^d; \mathcal{U}) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d; \mathcal{U})$, misma cond. inicial que (1).

El problema de convergencia es delicado. Es necesario especificar un criterio bajo el cual los tensores de viscosidad disipan entropía.

Sea (E, Ψ) par de entropía de (1). Sea u^ε es solución suave de (8). Suponemos que $D^2E \geq \delta > 0$. Entonces,

$$E(u^\varepsilon)_t + \sum_{j=1}^{d} \Psi^j(u^\varepsilon)_{x_j} =$$

$$= DE(u^\varepsilon)^T u^\varepsilon_t + \sum_{j=1}^{d} D\Psi^j(u^\varepsilon)^T u^\varepsilon_{x_j}.$$

$$= DE(u^\varepsilon)^T \left[u^\varepsilon_t + \sum_{j=1}^{d} A^j(u^\varepsilon) u^\varepsilon_{x_j} \right]$$

$$= \varepsilon \, DE(u^\varepsilon)^T \sum_{i,k=1}^{d} \left(B^{ik}(u^\varepsilon) u^\varepsilon_{x_i} \right)_{x_k}$$

$$= \varepsilon \sum_{i,k=1}^{d} \left(DE(u^\varepsilon)^T B^{ik}(u^\varepsilon) u^\varepsilon_{x_i} \right)_{x_k} +$$

$$- \underbrace{\varepsilon \sum_{i,k=1}^{d} (u^\varepsilon_{x_k})^T D^2E(u^\varepsilon) B^{ik}(u^\varepsilon) u^\varepsilon_{x_i}}$$

$$\cdots (10)$$

Para asegurar disipación el lado derecho de (10) debe satisfacer:

- forma cuadrática de $D^2E\, B^{ik}$ sea definida semi-positiva
- y debe ser dominante.