Lección 1.14 : Acoplamiento genuino. El límite de aproximación viscosa.

Acoplamiento genuino.

(SLC) $$u_t + \sum_{j=1}^{d} f^j(u)_{x_j} = 0 \quad \cdots (1)$$

$x \in \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, $t > 0$, $f^j \in C^2(\mathcal{U}; \mathbb{R}^n)$
$u \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$,

sistema viscoso :

(VSLC) : $$u_t + \sum_{j=1}^{d} f^j(u)_{x_j} = \sum_{i,j=1}^{d} (B^{ik}(u) u_{x_i})_{x_k} \quad \cdots (2)$$

$B^{ik} \in C^2(\mathcal{U}; \mathbb{R}^{n \times n})$ (normalizado)

Aplicaciones : $B^{ik}(u) \geq 0$

Importante (Navier-Stokes) : $\ker B^{ik}(u)$ es no trivial.

Kawashima (Ph.D. Thesis 1983)

Clase de Kawashima-Shizuta :

(H1) Regularidad : $f^j \in C^2(\mathcal{U}; \mathbb{R}^n)$, $B^{ik} \in C^2(\mathcal{U}; \mathbb{R}^{n \times n})$, $A^j = Df^j \in C^1(\mathcal{U}; \mathbb{R}^n)$
$\forall\ 1 \leq i, j, k \leq d$, $\forall u \in \mathcal{U}$.

(H2) Simetrizabilidad: $\exists\ S_0 = S_0(u)$, $S_0 \in C^2(\mathcal{U}; \mathbb{R}^{n\times n})$, $S_0(u)^T = S_0(u)$, $S_0(u) > 0$ tal que

$$\rightarrow \quad S_0(u)A^j(u) \quad \text{simétrica}$$
$$* \quad S_0(u)B^{ik}(u) \quad \text{"}$$

$\forall\ 1 \le i,j,k \le d$, $\forall\ u \in \mathcal{U}$.

Además, $\sum_{i,k=1}^{d} S_0(u)B^{ik}(u)\xi_i\xi_k \geq 0$

$\forall\ \xi \in \mathbb{R}^d$, $\xi \neq 0$, $\forall\ u \in \mathcal{U}$.

Kawashima (1984) → (H3) Acoplamiento genuino: $\forall\ u \in \mathcal{U}$, $\forall\ \xi \in \mathbb{R}^d$, $\xi \neq 0$, no existe vector propio de $\underbrace{\sum_{j=1}^{d} \xi_j A^j(u)}$ en $\ker\left(\sum_{i,k=1}^{d} \xi_i\xi_k B^{ik}(u)\right)$

(H4) Estructura de bloque: $\forall\ u \in \mathcal{U}$, $\forall\ \xi \in \mathbb{R}^d$, $\xi \neq 0$, el núcleo de $\sum_{i,k=1}^{d} B^{ik}(u)\xi_i\xi_k$ es independiente de u.

¿Por qué acoplamiento genuino?

Soluciones a (1) tienen forma de onda viajera. Sea $u_* \in \mathcal{U}$, fijo. Sea $\hat{\nu} \in \mathbb{R}^d$, $|\hat{\nu}|$ dirección de propagación.

Linealizando (1) alrededor de u_* :

$$u_t + \sum_{j=1}^{d} A^j(u_*)\, u_{x_j} = 0 \qquad \cdots (3)$$

$$A(u,\hat{\nu}) := \sum_{j=1}^{d} \nu_j A^j(u) \qquad \text{símbolo}$$

Sea $r = r(u_*,\hat{\nu})$ un vector propio de $A(u_*,\hat{\nu})$ con valor propio $\lambda = \lambda(u_*,\hat{\nu})$:

$$A(u_*,\hat{\nu})\, r(u_*,\hat{\nu}) = \lambda(u_*,\hat{\nu})\, r(u_*,\hat{\nu})$$

onda plana :

$$\Phi(x,t) := \underbrace{\varphi\big(\overbrace{x\cdot\hat{\nu} - \lambda(u_*,\hat{\nu})t}\big)}_{\in \mathbb{R}}\ \underbrace{r(u_*,\hat{\nu})}_{\in \mathbb{R}^n}$$

$\varphi = \varphi(\xi)$, $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$.

$$-\lambda(u_*,\hat{\nu})\,\varphi'\big(x\cdot\hat{\nu} - \lambda(u_*,\hat{\nu})t\big)\, r(u_*,\hat{\nu}) + \sum_{j=1}^{d} A^j(u_*)\,\nu_j\, r(u_*,\hat{\nu}) = 0$$

onda viajera solución de (3) : "onda hiperbólica"

Linealizando (2) alrededor de u_* :

$$u_t + \sum_{j=1}^{d} A^j(u_*)u_{x_j} = \sum_{i,k=1}^{d} \left(B^{ik}(u_*)u_{x_k}\right)_{x_i}$$

... (4)

Sustituyendo $\Phi(x,t)$ en (4):

$$\theta := x\cdot\hat{\nu} - \lambda(u_*,\hat{\nu})t = \theta(x,t)$$

$$\varphi'(\theta)\Big[\overbrace{-\lambda(u_*,\hat{\nu})r(u_*,\hat{\nu}) + A(u_*,\hat{\nu})r(u_*,\hat{\nu})}^{=0}\Big]$$

$$= \varphi''(\theta)\underbrace{\sum_{i,k=1}^{d} B^{ik}(u_*)\nu_i\nu_k}\, r(u_*,\hat{\nu})$$

Si $r(u_*,\hat{\nu})$ vector propio de $A(u_*,\hat{\nu})$ está en $\mathrm{Ker}\left(\sum B^{ik}(u_*)\nu_i\nu_k\right)$ entonces la onda hiperbólica Φ es solución también de (3).

Límite de aproximación viscosa

(A) viscosidad idéntica $\quad B^{ik} = \delta_i^k$

$$(1)\dots\begin{cases} u_t + \sum_{j=1}^{d} f^j(u)_{x_j} = \varepsilon\,\Delta u \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases}$$

$u_0 \in C^1(\mathbb{R}^d;\mathcal{U}) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d;\mathcal{U})$

Teoría parabólica $\Rightarrow$ $\forall\, \varepsilon>0$ existe

$u^\varepsilon = u^\varepsilon(x,t)$, $\quad u^\varepsilon \in C^2(\mathbb{R}^d\times(0,\infty)) \cap C(\mathbb{R}^d\times[0,\infty))$

$u^\varepsilon(x,0) = u_0(x) \quad \forall\, \varepsilon>0$

de (1) que satisface

(2) ... $\|u^\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d \times [0,\infty))} \leq C$

uniformemente $\forall \varepsilon > 0$ (principio del máximo).

Adicionalmente suponemos:

(3) ... $u^\varepsilon \longrightarrow u$ c.d.s. en $\mathbb{R}^d \times (0,\infty)$ cuando $\varepsilon \to 0^+$

(4) ... $\exists$ par de entropía (E, Ψ) del sistema hiperbólico subyacente:

$$u_t + \sum_{j=1}^{d} f^j(u)_{x_j} = 0 \quad \dots(5)$$

$$(DE)^T A^j = (D\Psi^j)^T \quad \forall j, \forall u$$

Teorema Bajo estas hipótesis, el límite

$$u(x,t) := \lim_{\varepsilon \to 0^+} u^\varepsilon(x,t) \quad \text{c.d.s. en } (x,t) \in \mathbb{R}^d \times (0,\infty)$$

es solución débil del sistema hiperbólico (5), con condición inicial $u(x,0) = u_0(x)$ c.d.s. en $x \in \mathbb{R}$. Además, esta solución satisface la desigualdad de entropía

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_t E(u) + \sum_{j=1}^d \varphi_{x_j} \Psi^j(u)\, dx\, dt \; +$$

(6) ~ $$+ \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x,0) E(u_0(x))\, dx \geq 0$$

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}_+ = \{ \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R} ; \mathbb{R}) : \varphi \geq 0 \}$$