Lección 1.13 : La transformación de Hopf-Cole.

Ecuación de Burgers viscosa:

$$u_t + \left(\tfrac{1}{2}u^2\right)_x = \varepsilon u_{xx} \quad \cdots (1)$$

$x \in \mathbb{R}$, $u = u(x,t) \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$, $\varepsilon > 0$.

Modelo <u>no</u> viscoso:

$$u_t + \left(\tfrac{1}{2}u^2\right)_x = 0 \quad \cdots (2)$$

Soluciones débiles de (2):

$$u(x,t) = \begin{cases} u_L, & x < st \\ u_R, & x > st \end{cases} \quad \cdots (3)$$

(3) es un frente plano, $u_L \neq u_R \in \mathbb{R}$,

$f(u) = \frac{1}{2}u^2$, $\quad s = \frac{1}{2}(u_R + u_L)$

Nota: (3) se denomina onda de choque si además se satisface una condición adicional de entropía.

Formalmente, cuando $\varepsilon \to 0^+$ uno debería recuperar (2) con soluciones tipo (3).

(3) es una solución de tipo onda viajera

$$u(x,t) = \varphi(x-st)$$

$\xi := x - st$ — variable de traslación

(3) $\Leftrightarrow$ $\varphi(\xi) = \begin{cases} u_L, & \xi < 0 \\ u_R, & \xi > 0 \end{cases}$

Supongamos que

$$u(x,t) = \varphi(x-st) \qquad \cdots \quad (4)$$

es solución de (1). $\xi = x - st$, $s \in \mathbb{R}$

$' = d/d\xi$

sustituyendo:

$$-s\varphi' + \left(\tfrac{1}{2}\varphi^2\right)' = \varepsilon\varphi'' \qquad \cdots \quad (5)$$

Integrando:

$$\underbrace{k - s\varphi + \tfrac{1}{2}\varphi^2} = \varepsilon\varphi' \qquad \cdots \quad (6)$$

$k \in \mathbb{R}$ constante. Buscamos

- $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$, acotada.
- $\lim_{x \to \pm\infty} \varphi(\xi) = \varphi_\pm$ raíces de $k - s\varphi + \frac{1}{2}\varphi^2 = 0$.

condición $s^2 > 2k$. $\Rightarrow$ estas raíces son reales:

$$u_L = s + \sqrt{s^2 - 2k} > u_R = s - \sqrt{s^2 - 2k}$$

$$\Rightarrow \quad 2\varepsilon \varphi' = (\varphi - u_L)(\varphi - u_R).$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{\xi \to \pm\infty} \varphi(\xi) = \varphi_{\pm} \qquad \begin{aligned} \varphi_+ &= u_R \\ \varphi_- &= u_L \end{aligned}$$

Nota: $s = \frac{1}{2}(u_R + u_L)$ misma velocidad de la onda de choque (3). (Rankine-Hugoniot)

Tenemos una "onda de choque viscosa":

$$\varphi \in C^2(\mathbb{R}), \qquad \begin{aligned} \varphi &\to u_R \quad \text{si } \xi \to \infty \\ \varphi &\to u_L \quad \text{si } \xi \to -\infty \end{aligned}$$

y se propaga con velocidad $s = \frac{1}{2}(u_R + u_L)$.

Integrando (6):

$$\frac{2\varepsilon}{u_L - u_R} \log\left(\frac{u_L - \varphi}{\varphi - u_R}\right) = \xi - \alpha$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$ constante. Resolviendo para φ (tomando $\alpha = 0$):

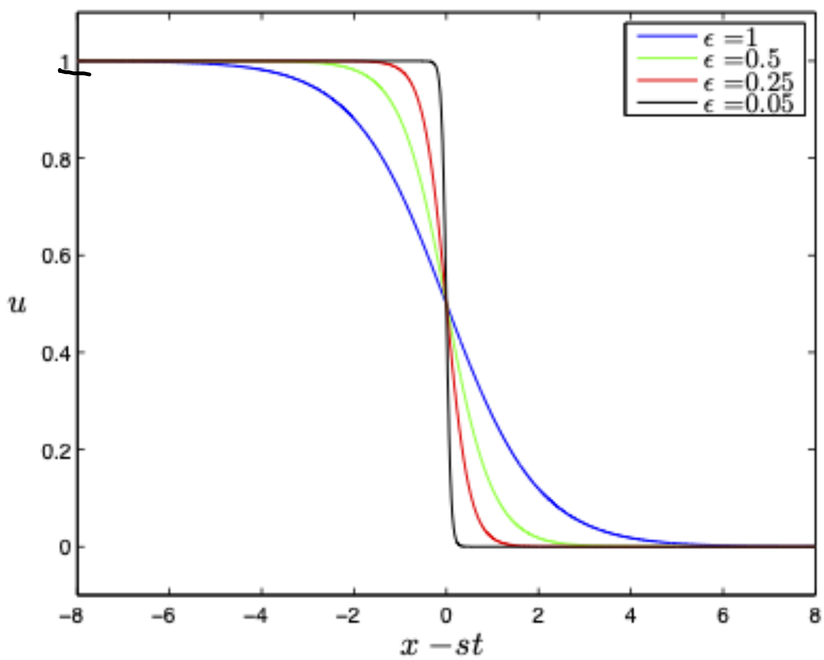
$$\varphi(\xi) = u_R + \frac{u_L - u_R}{1 + \exp\left(\frac{1}{2\varepsilon}\left((u_L - u_R)\xi\right)\right)}$$

$$= u_R + \frac{1}{2}(u_L - u_R)\left[1 - \tanh\left(\frac{(u_L - u_R)\xi}{2\varepsilon}\right)\right]$$

$\varphi \to u_L$ si $\xi \to -\infty$
$\varphi \to u_R$ si $\xi \to +\infty$

onda viajera:

$$u(x,t) = u_R + \frac{1}{2}(u_L - u_R)\left[1 - \tanh\left(\frac{(u_L - u_R)(x - st)}{2\varepsilon}\right)\right]$$



Perfiles con $u_R = 0$, $u_L = 1$, $s = \frac{1}{2}$.

con $\varepsilon \to 0^+$

cuando $\varepsilon \to 0^+$, el perfil viscoso tiende al frente plano (discontinuo).

Transformación de Hopf-Cole

cambio de variables:

$$u = -2\varepsilon \frac{w_x}{w} \quad \dots \quad (7)$$

Ejercicio: demostrar que si u es solución de (1) entonces w es solución de

$$w_t = \varepsilon w_{xx} \quad \dots \quad (8)$$

Lema Si $w = w(x,t) > 0$ es solución de (8) entonces $u = u(x,t)$ definida por (7) es solución de la ec. de Burgers viscosa (1). Asimismo, cada solución de (1) proviene de una solución positiva de (8).

Demostración "$\Rightarrow$" Ejercicio

"$\Leftarrow$" Sea $u = u(x,t) \in C^2(\mathbb{R} \times (0,\infty))$ una solución de (1). Sea

$$\tilde{v}(x,t) := \int_0^x u(y,t)\, dy$$

Integrando (1):

$$\tilde{v}_t + \frac{1}{2}\tilde{v}_x^2 = \varepsilon \tilde{v}_{xx} + \bar{c}(t)$$

$\bar{c} = \bar{c}(t)$ "const." de integración

Definimos :

$$U(x,t) = \tilde{U}(x,t) - \int_0^t \bar{c}(\tau)\, d\tau$$

entonces $U_x = u$ y

$$U_t = \varepsilon U_{xx} - \frac{1}{2} U_x^2 \quad \cdots (9)$$

Definimos :

$$w(x,t) := \exp\left(-\frac{1}{2\varepsilon} U(x,t)\right) \in C^2$$

Entonces w es solución :

$$w_t = -\frac{1}{2\varepsilon} U_t \exp\left(-\frac{1}{2\varepsilon} U\right)$$

$$w_x = -\frac{1}{2\varepsilon} U_x \exp\left(-\frac{1}{2\varepsilon} U\right)$$

$$w_{xx} = -\frac{1}{2\varepsilon} U_{xx} \exp\left(-\frac{1}{2\varepsilon} U\right) + \\ + \frac{1}{4\varepsilon^2} U_x^2 \exp\left(-\frac{1}{2\varepsilon} U\right)$$

$\Rightarrow$ $w_t = \varepsilon w_{xx}$ por la ec. (9)

$\square$

Si tenemos $u = u(x,t)$ solución de

$$(10)\ldots \begin{cases} u_t + \left(\frac{1}{2}u^2\right)_x = \varepsilon u_{xx} \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases}$$

entonces w es solución de

$$(11)\ldots \begin{cases} w_t = \varepsilon w_{xx} \\ w(x,0) = \exp\left(-\frac{1}{2\varepsilon}\int_0^x u_0(\xi)\,d\xi\right) \end{cases}$$

$$\underset{\text{no lineal}}{(10)} \overset{\text{Hopf-Cole}}{\Longleftrightarrow} \underset{\text{lineal}}{(11)}$$

Solución:

$$w(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\varepsilon t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-y)^2/(4\varepsilon t)}\, w_0(y)\, dy$$

Aplicando Hopf-Cole obtenemos:

$$(12)\ldots \quad u(x,t) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{x-y}{t}\right) \exp\left(G(x,t,y)\right) dy}{\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(G(x,t,y)\right) dy}$$

donde

$$G(x,t,y) := -\frac{1}{2\varepsilon}\int_0^y u_0(\xi)\,d\xi - \frac{(x-y)^2}{4\varepsilon t} \quad \cdots (13)$$

(12) es la solución de (10) $\forall\, \varepsilon > 0$.

Problemas (12) con:

$$u(x,0) = \begin{cases} u_L, & x<0 \\ u_R, & x>0 \end{cases}$$

con $u_R < u_L$, constantes. En este caso

$$G(x,t,y) = -\frac{(x-y)^2}{4\varepsilon t} + \begin{cases} \frac{u_L}{2\varepsilon}\, y, & y<0 \\ -\frac{u_R}{2\varepsilon}\, y, & y>0 \end{cases}$$

ya que $\int_0^y u_0(\xi)\,d\xi = u_R\, y$ si $y>0$

$$\int_0^y u_0(\xi)\,d\xi = -\int_y^0 u_0(\xi) = -u_L\, y \quad \text{si } y<0$$

Sustituyendo la solución es:

$$u(x,t) = u_R + \frac{u_L - u_R}{1 + \underbrace{h(x,t)} \exp\left(\frac{(u_L-u_R)(x-st)}{2\varepsilon}\right)}$$

donde $s = \frac{1}{2}(u_R + u_L)$ y

$$h(x,t) = \frac{\displaystyle\int_{-(x-u_R t)/\sqrt{4\varepsilon t}}^{\infty} e^{-\theta^2}\, d\theta}{\displaystyle\int_{+(x-u_L t)/\sqrt{4\varepsilon t}}^{\infty} e^{-\theta^2}\, d\theta}$$

Solución de (1) cuando u_0 es un frente discontinuo. Es única en la clase de soluciones $C^2 \cap \underbrace{L^\infty}_{\text{acotadas}}$.

Nota: para $\frac{x}{t}$ fijo con

$$u_R < \frac{x}{t} < u_L$$

$$h(x,t) \longrightarrow 1 \quad \text{si} \quad t \to \infty$$

$\therefore$ la solución al problema de Cauchy con condición inicial $u_0 = \begin{cases} u_L, & x<0 \\ u_R, & x>0 \end{cases}$

tiende a una onda viajera que conecta u_L con u_R con velocidad $s = \frac{1}{2}(u_R + u_L)$.