Lección 1.12 : Aproximación viscosa: Ecuación de Burgers viscosa.

Ejemplos :

(a) Sistema p.

Sea $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $p \in C^2(\mathbb{R})$, $p'(v) < 0$, $p''(v) > 0$ $\forall\, v \in \mathbb{R}$. El sistema p tiene la forma :

$$\left.\begin{array}{ll} (1a) : & v_t - w_x = 0 \\ (1b) : & w_t + p(v)_x = 0 \end{array}\right\} \qquad (1)$$

$$f(v,w) = \begin{pmatrix} -w \\ p(v) \end{pmatrix}$$

$$A(v,w) = Df(v,w) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ p'(v) & 0 \end{pmatrix}$$

$$Q(v) = \int^{v} p(\xi)\, d\xi \quad \Rightarrow \quad Q'(v) = p(v).$$

Mult. (1a) por $-p(v)$
" (1b) " w

y sumamos:

$$-Q'(v)v_t + w w_t + p(v) w_x + p(v)_x w = 0$$

energía cinética   potencial

$$\Rightarrow \quad \partial_t\left(\tfrac{1}{2}w^2 - Q(v)\right) + \partial_x\left(p(v)\, w\right) = 0.$$

sugerencia : $(E, \Psi) = \left(\tfrac{1}{2}w^2 - Q(v),\ w\,p(v)\right)$

es un par de entropía.

$$(DE)^T = \left(-Q'(v) \quad w\right) = \left(-p(v) \quad w\right)$$

$$(D\Psi)^T = \left(wp'(v) \quad p(v)\right)$$

$$\Rightarrow (DE)^T A = \left(-p(v) \quad w\right)\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ p'(v) & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \left(wp'(v) \quad p(v)\right) = (D\Psi)^T$$

$\therefore$ es un par de entropía.

$$S(v,w) := D^2E(v,w) = \begin{pmatrix} -p'(v) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

es simetrizador de (1). En efecto:

- S es simétrica
- $S>0$ $\quad (-p'(v)>0)$
- SA simétrica

$$\begin{pmatrix} -p'(v) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ p'(v) & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & p'(v) \\ p'(v) & 0 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

(b) Ecuaciones de agua poco profunda en 1-d :

$$(2)\quad \begin{cases} \eta_t + (\eta u)_x = 0 \\ (\eta u)_t + \left(\frac{1}{2} g \eta^2 + \eta u^2\right)_x = 0 \end{cases}$$

con $g>0$ constante.

Sea (E, Ψ) es un par de entropía del sistema (2) :

Ejercicio : Demostrar que E satisface

$$E_{uu} = \frac{\eta}{g} E_{\eta\eta}$$

Resolver por separación de variables para hallar E. Hallar Ψ.

(c) Euler (caso barotrópico) :

$p = p(\rho)$ presión

$$\rho_t + (\rho v)_x = 0$$

$$(\rho v)_t + \left(\rho v^2 + p(\rho)\right)_x = 0$$

Ejercicio : Demostrar que

$$E = \frac{1}{2}\rho v^2 + G(\rho)$$

es función de entropía si $G''(\rho) = \frac{p'(\rho)}{\rho}$ $\forall \rho > 0$

Verificar que E es convexa $\forall \rho>0$ en las variables $(U_1, U_2) = (\rho, \rho v)$
¿Quien es Ψ?

Hallar (E, Ψ) para $P(\rho) = k\rho^\gamma$ con $k>0$, $\gamma>1$.

1.6 Aproximación viscosa

Efectos de viscosidad o disipación son importantes.

$$(SLC): \quad u_t + \sum_{j=0}^{d} f^j(u)_{x_j} = 0 \qquad \cdots (1)$$

Sistema viscoso asociado:

$$(SVLC): \quad u_t + \sum_{j=0}^{d} f^j(u)_{x_j} = \sum_{j,k=1}^{d} \left(B^{jk}(\bar{\varepsilon}, u) u_{x_k}\right)_{x_j} \qquad \cdots (2)$$

donde para cierto $m \geq 1$

$$\bar{\varepsilon} = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_m) \in \mathbb{R}^m$$

con $\epsilon_j > 0$, $\forall\ 1 \leq j \leq m$.

coeficientes de "difusión" (disipación).

ν – viscosidad (cinemática)
$0 < k$ – coeficiente de conducción de calor de Fourier.

$\epsilon_1 = \nu, \quad \epsilon_2 = k$ (Navier-Stokes)

Además,

$$B^{jk} \in C^2(\underbrace{\mathbb{R}^m \times \mathcal{U}}_{\bar{\epsilon}, u}; \mathbb{R}^{n \times n})$$

$1 \leq j, k \leq d$

tensores de viscosidad.

Requerimiento: tomando $|\bar{\epsilon}| \to 0$ se debe recuperar (SLC).

(3) ... $\quad B^{jk}(0, u) = 0 \quad \forall u \in \mathcal{U} \quad \forall j, k.$

Casos:

(a) $\quad B^{jk}(\bar{\epsilon}, u) \equiv \epsilon \delta_j^k \mathbb{I}$

con $m = 1$, $\quad \bar{\epsilon} = \epsilon > 0$ $\quad$ viscosidad idéntica.

sustituyendo:

(4) ... $$u_t + \sum_{j=1}^{d} f^j(u)_{x_j} = \epsilon \Delta u$$

operador de Laplace.

(b) Viscosidad estrictamente parabólica:

(5)... $$\sum_{j,k=1}^{d} \xi_j \xi_k B^{jk}(\varepsilon, u) > 0$$

$\forall\, u \in \mathcal{U}, \quad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^d, \quad \xi \neq 0.$

(c) Viscosidad "real."

Ejemplo: Navier-Stokes compresible

(NS-Fourier)

$u \in \mathbb{R}^d$

$$\rho_t + \operatorname{div}(\rho u) = 0$$

$$(\rho u)_t + \operatorname{div}(\rho u \otimes u) + \nabla p =$$

$$= \operatorname{div}\left(\mu (\operatorname{div} u) \mathbb{I} + \lambda \left(\nabla u + (\nabla u)^T\right)\right)$$

$$\left(\rho\left(e + \tfrac{1}{2}|u|^2\right)\right)_t + \operatorname{div}\left[\rho\left(e + \tfrac{1}{2}|u|^2\right)u + p u\right] =$$

$$= \operatorname{div}\left[\mu (\operatorname{div} u) u + \lambda\left(\nabla u + (\nabla u)^T\right) u\right] +$$

$$+ k \Delta \theta$$

$p(\rho, e) = p$
$\theta(\rho, e) = \theta$

NS se puede escribir como (2)

con $\sum_{j,k=1}^{d} B^{jk} \xi_j \xi_k \geq 0$ definido semi-positivo.

Pregunta: ¿Las soluciones al sistema (2) aproximan cuando $|\varepsilon| \to 0$ las soluciones de (1)?

Límite cuando $|\vec{\varepsilon}| \to 0$ es en realidad un criterio de selección de soluciones débiles a (1).

<u>Ecuación de Burgers y transformación de Hopf-Cole</u>

Ecuación de Burgers <u>viscosa</u>:

$$u_t + \left(\tfrac{1}{2}u^2\right)_x = \varepsilon u_{xx} \quad \cdots (1)$$

término de regularización.

con $\varepsilon > 0$, $x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$.

Observación: (1) es una ecuación parabólica $\Rightarrow$ soluciones de (1) son clásicas.