Lección 1.11: Entropía e hiperbolicidad (continuación).

Lema (Friedrichs-Lax)

Sea un (SLC):

$$u_t + \sum_{j=1}^{d} f^j(u)_{x_j} = 0 \qquad \cdots (1)$$

con $u \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ abierto, acotado y conexo, $f^j \in C^2(\mathcal{U};\mathbb{R}^n)$, $\forall\ 1 \leq j \leq d$. Si existe una función de entropía

$$E \in C^2(\mathcal{U};\mathbb{R}), \quad \text{estrictamente convexa}$$

para (1) entonces el sistema (1) es simetrizable.

Asimismo, si $E \in C^2(\mathcal{U};\mathbb{R})$ estrictamente convexa es tal que $D^2E(u)A^j(u)$ es simétrica $\forall\, u \in \mathcal{U}$, $\forall\ 1 \leq j \leq d$ (aquí $A^j(u) = Df^j(u)$), entonces E es una función de entropía para (1).

Demostración

Primero suponemos que $E \in C^2(\mathcal{U};\mathbb{R})$, $D_u^2E(u) \geq \delta > 0$, es función de entropía del sistema (1). Entonces existen

$$\Psi^j \in C^1(\mathcal{U};\mathbb{R}), \qquad 1 \leq j \leq d$$

tales que $\underbrace{DE(u)^T A^j(u) = D\Psi^j(u)^T}_{(*)}$
$\forall\, u \in \mathcal{U}, \ \forall\, 1 \le j \le d.$

$$(*) \iff \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial E}{\partial u_l} \frac{\partial f_l^j}{\partial u_k} = \frac{\partial \Psi^j}{\partial u_k} \qquad \forall \begin{array}{l} 1 \le j \le d \\ 1 \le k \le n \end{array}$$

Sea $1 \le m \le n$. Derivando con respecto a u_m:

$$(2) \ldots \quad \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial^2 E}{\partial u_m \partial u_l} \frac{\partial f_l^j}{\partial u_k} = \underbrace{\frac{\partial^2 \Psi^j}{\partial u_m \partial u_k} - \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial E}{\partial u_l} \frac{\partial^2 f_l^j}{\partial u_m \partial u_k}}_{=:\ G^j_{k,m}(u)}$$

$\Psi^j, f^j \in C^2$ en dominio conexo $\mathcal{U}$

$\underset{\text{lema de Schwarz}}{\Rightarrow}$ $G^j(u)$ es simétrica

$G^j(u) \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$G^j_{k,m}(u)$ – componente (k,m)

$\Rightarrow$ el lado izq. de (2) también es simétrico. Es decir,

$$\sum_{l=1}^{n} \frac{\partial^2 E}{\partial u_m \partial u_l} \frac{\partial f_l^j}{\partial u_k} = \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial^2 E}{\partial u_k \partial u_l} \frac{\partial f_l^j}{\partial u_m}$$

$$\iff \left(D^2E(u)\,Df^j(u)\right)^T = D^2E(u)\,Df^j(u).$$

$$\forall\, u \in \mathcal{U}, \quad \forall\, 1 \le j \le d.$$

Es decir, $D^2E(u)$ es un simetrizador de (1).

Ahora sea $E \in C^2(\mathcal{U};\mathbb{R})$, $D^2E(u) \geq \delta > 0$,

D^2E simetrizador de (1). Sean

$$\begin{cases} g^j(u) := \underset{1\times n}{DE(u)^T}\, \underset{n\times n}{Df^j(u)} \\ g^j : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^{1\times n} \end{cases} \qquad 1 \leq j \leq d$$

$D^2E(u)Df^j(u)$ simétrica $\forall u, \forall j$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial g_k^j}{\partial u_m} = \frac{\partial}{\partial u_m}\left(\sum_{l=1}^{n} \frac{\partial E}{\partial u_l}\frac{\partial f_l^j}{\partial u_k}\right)$$

$$= \sum_{l=1}^{n}\left[\underbrace{\frac{\partial^2 E}{\partial u_m \partial u_l}\frac{\partial f_l^j}{\partial u_k}} + \frac{\partial E}{\partial u_l}\frac{\partial^2 f_l^j}{\partial u_m \partial u_k}\right]$$

$$= \sum_{l=1}^{n}\left[\frac{\partial^2 E}{\partial u_k \partial u_l}\frac{\partial f_l^j}{\partial u_m} + \frac{\partial E}{\partial u_l}\frac{\partial^2 f_l^j}{\partial u_k \partial u_m}\right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial u_k}\left(\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial E}{\partial u_l}\frac{\partial f_l^j}{\partial u_m}\right) = \frac{\partial g_m^j}{\partial u_k}$$

Por el lema de Poincaré, existen $\Psi^j : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ tales que

$$D\Psi^j(u) = g^j(u) \qquad \forall u, \forall j$$

$$\iff \quad DE(u)^T Df^j(u) = D\Psi^j(u)^T$$

$\therefore$ (E, Ψ) es un par de entropía de (1) $\square$

Observación Si $\exists$ función de entropía con $D^2E \geq \delta > 0$ entonces (1) es simetrizable ($\Rightarrow$ hiperbólico). D^2E es un simetrizador.

Lema Una condición necesaria y suficiente para que el sistema (1) posea una función de entropía $E \in C^2(\mathcal{U}; \mathbb{R})$, $D^2E(u) \geq \delta > 0$ $\forall u$ es la existencia de una transformación, $u = Ⓗ(w)$, $Ⓗ \in C^1$, $Ⓗ : \mathbb{R}^n \to \mathcal{U}$, tal que el sistema para w tiene la siguiente forma simétrica

$$(3) \therefore \quad \underbrace{D_w Ⓗ(w)}_{\text{simétrica}} w_t + \sum_{j=1}^{d} \underbrace{A^j(Ⓗ(w)) D_w Ⓗ(w)}_{\text{simétrica}} w_{x_j} = 0$$

con $D_w Ⓗ > 0$ definido positivo y simétrico y con $A^j(Ⓗ(w)) D_w Ⓗ(w)$ simétrico $\forall j$, $\forall w$.

Demostración

"$\Rightarrow$" Si $E \in C^2(\mathcal{U}; \mathbb{R})$ es función de entropía, $D^2E > 0$ por el lema de Friedrichs-Lax D^2E es simetrizador y el mapeo buscado es simplemente $w = D_u E(u) = Ⓗ^{-1}(u)$

"$\Leftarrow$" Suponiendo $\exists$ Ⓗ.

$$\therefore \begin{cases} D_w Ⓗ & \text{simétrico} \\ A^j D_w Ⓗ & \text{"} \quad \forall\, 1 \leq j \leq d \end{cases}$$

Además $D_w \Theta$ es def. positivo.

Por el lema de Poincaré $\exists$

$$\begin{cases} q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ g^j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, & 1 \le j \le d \end{cases}$$

tales que

$$D_w q^{(w)} = \Theta(w) = u$$

$$D_w g^j(w) = f^j(\Theta(w)) = f^j(u)$$
$$\forall\ 1 \le j \le d$$

$$D_w \Theta > 0 \Rightarrow D_w^2 q > 0$$

q estrictamente convexa

$\Rightarrow$ el mapeo $w \longmapsto D_w q$ es inyectivo.

Así, podemos escribir $w = \Theta^{-1}(u) =: w(u)$

Definimos

$$E(u) := w(u)^T u - q(w(u))$$

$$\Psi^j(u) := w(u)^T f^j(u) - g^j(w(u)), \qquad 1 \le j \le d.$$

Derivando :

$$D_u E(u)^T = w(u)^T + u^T D_u w(u)$$
$$- D_w q(w(u))^T D_u w(u)$$
$$= w(u)^T$$

$u = D_w q(w(u))$

$$D_u \Psi^j(u)^T = w(u)^T D_u f^j(u) + f^j(u)^T D_u w(u) +$$
$$- D_w g^j(w(u))^T D_u w(u)$$
$$= w(u)^T D_u f^j(u) \qquad \forall\ 1 \leq j \leq d.$$

$D_w g^j(w(u)) = f^j(u)^T$

$$\Rightarrow \qquad DE(u)^T A^j(u) = \Psi^j(u)^T$$

$\therefore\ (E, \Psi)$ es par de entropía.

Más aún, dado que $D_u E(u) = w(u)$ ($D_u E(\mathcal{H}(w)) = w \quad \forall\ w$) por invertibilidad de $\mathcal{H}$ obtenemos

$$D_u^2 E(\mathcal{H}(w))\, D_w \mathcal{H}(w) = I$$

$$D_u^2 E(\mathcal{H}(w)) = (D_w \mathcal{H})^{-1}(w)$$

$$\Leftrightarrow \quad D_u^2 E(u) = (D_w \mathcal{H})^{-1}(w(u)) > 0 \quad \forall\ u \in \mathcal{U}.$$

$\square$

Ejemplos:

(A) Sistema p.

$$v_t - w_x = 0$$
$$w_t + p(v)_x = 0$$

con $p'(v) < 0$. Sea $Q(v) := \int^{v} p(\xi)\, d\xi$

$Q'(v) = p(v)$, $Q''(v) = p'(v) < 0$.

Matriz jacobiana:

$$Df(v,w) = A(v,w) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ p'(v) & 0 \end{pmatrix}$$

Mult. la primera ec. por $-p(v)$
y segunda ec. por w

Y sumando:

$$-p(v)v_t - p(v)w_x = 0$$
$$w w_t + p(v)_x w = 0$$

$$\Rightarrow \partial_t\left(\tfrac{1}{2}w^2 - Q(v)\right) + \partial_x\left(p(v)w\right) = 0$$

Sugerencia:

$E(v,w) := \frac{1}{2}w^2 - Q(v)$ func. entropía

$\Psi(v,w) := p(v)w$ flujo entropía.