Lección 1.10 : Entropía e hiperbolicidad.

(SLC): $$u_t + \sum_{j=1}^{d} f^j(u)_{x_j} = 0 \quad \cdots (1)$$

$u \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, $n \geq 1$

$f^j \in C^2(\mathcal{U}; \mathbb{R}^n)$

condición inicial $$u(x,0) = u_0(x) \quad \cdots (2)$$

$u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$.

En algunos modelos, soluciones de clase C^1 de (1) satisfacen una ley de conservación adicional de la forma:

$$E(u)_t + \sum_{j=1}^{d} \Psi^j(u)_{x_j} = 0 \quad \cdots (3)$$

donde $E \in C^2(\mathcal{U}; \mathbb{R})$, estrictamente convexa

$\Psi^j \in C^1(\mathcal{U}; \mathbb{R})$, $1 \leq j \leq d$.

E - se denomina función de entropía

$\Psi = (\Psi^1, \ldots, \Psi^d)^\top \in \mathbb{R}^{d\times 1}$ flujos de entropía

(E, Ψ) - par de entropía

¿Bajo qué condiciones soluciones suaves de (1) satisfacen (3)?

$$DE(u) = (E_{u_1}, \dots, E_{u_n})^T \in \mathbb{R}^{n\times 1}$$

$$D\Psi^j(u) = (\Psi^j_{u_1}, \dots, \Psi^j_{u_n})^T \in \mathbb{R}^{n\times 1}$$

Multiplicando (1) por $DE(u)^T$ obtenemos:

$$0 = DE(u)^T u_t + \sum_{j=1}^{d} DE(u)^T f^j(u)_{x_j}$$

$$= E(u)_t + \sum_{j=1}^{d} DE(u)^T A^j(u) u_{x_j}$$

$u \in C^1$

$A^j = Df^j$

Si se cumplen las relaciones

(4) ... $$DE(u)^T A^j(u) = D\Psi^j(u)^T$$ $\forall\ 1 \leq j \leq d$, $\forall\ u \in \mathcal{U}$

entonces se cumple una ecuación de la forma (3).

Definición Una función real y convexa, $E \in C^1(\mathcal{U}; \mathbb{R})$ es una función de entropía para el sistema (1) si existen d funciones $\Psi^j \in C^1(\mathcal{U}; \mathbb{R})$, $1 \leq j \leq d$, llamadas flujos de entropía, tales que satisfacen (4) $\forall\ 1 \leq j \leq d$, $\forall\ u \in \mathcal{U}$.

Si $\exists$ par de entropía (E, Ψ) entonces toda solución clásica de (1) satisface (3).

<u>Observaciones</u>

(a) La relación (3) <u>no</u> es cierta para soluciones débiles con discontinuidades. Si u es sol. débil con discontinuidad Σ la ley de conservación (3) induce una condición de salto de tipo Rankine-Hugoniot de la forma

$$\hat{n}_t [\![E(u)]\!] + \sum_{j=1}^{d} \hat{n}_j [\![\Psi^j(u)]\!] = 0.$$

IDEA: Sustituimos la ecuación (3) por una desigualdad

$$(5) \cdots \qquad E(u)_t + \sum_{j=1}^{d} \Psi^j(u)_{x_j} \leq 0$$

en sentido distribucional y para soluciones débiles.

(b) Aplicaciones:

$$E(u) = -\hat{s}(u)$$

entropía matemática — entropía física

Ejemplo: dinámica de gases.

(c) Multiplicamos (5) por una función de prueba :

$$\phi \in \mathcal{D}_+ := \left\{ \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}; \mathbb{R}) : \phi \geq 0 \right\}$$

... (6)

e integramos por partes :

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} \left(\phi_t E(u) + \sum_{j=1}^d \phi_{x_j} \Psi^j(u) \right) dx\, dt$$

$$(7) \ldots \qquad + \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x,0) E(u_0(x))\, dx \geq 0$$

Una solución débil $u \in L^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$ de (1) y (2) se denomina entrópica si satisface (7) $\forall \phi \in \mathcal{D}_+$, $\forall$ par de entropía (E, Ψ).

(d) Las ecuaciones (4) son un sistema de n ecuaciones para cada j. (nd ecuaciones), con d+1 funciones desconocidas, E y Ψ^j. En general, está sobredeterminado.

A pesar de esto existen ejemplos importantes para los cuales podemos encontrar (E, Ψ) : ejemplo : dinámica de gases.

Existe una clase de sistemas para los cuales siempre podemos hallar (E, Ψ) : los sistemas simétricos.

Lema (de Poincaré)
Si el sistema (1) es simétrico entonces existen funciones

$$g^j \in C^1(\mathcal{U}; \mathbb{R}), \qquad 1 \leq j \leq d$$

tales que $\quad Dg^j(u) = f^j(u), \quad \forall u \in \mathcal{U}.$

Demostración Basta con probar que si

$$\theta \in C^1(\mathcal{U}; \mathbb{R}^n) \text{ es tal que}$$

$$D\theta(u) \text{ es simétrico}$$

entonces podemos hallar $g \in C^1(\mathcal{U}; \mathbb{R})$ tal que $Dg(u) = \theta(u)$.

Definimos

$$g(u) = \int_{u_*}^{u_j} \theta_j(u_1, \dots, \xi_j, \dots, u_n)\, d\xi_j, \quad \forall u_* \in \mathcal{U}.$$

Así, $\quad g_{u_j} = \theta_j \quad$ y para $k \neq j$ (dado que $D\theta$ es simétrico),

$$\partial_{u_k} g(u) = \int_{u_*}^{u_j} \frac{\partial \theta_j}{\partial u_k}(u_1, \dots, \xi_j, \dots, u_n)\, d\xi_j$$

$$= \int_{u_*}^{u_j} \frac{\partial \theta_k}{\partial u_j}(u_1, \dots, \xi_j, \dots, u_n)\, d\xi_j$$

$D\theta^T = D\theta$

$$= \theta_k(u) + C$$

Podemos escoger $C = 0$. Así,

$$Dg(u) = \theta(u) \qquad \forall u \in \mathcal{U}$$

$\square$

__Lema__ Para un sistema (1) __simétrico__ la función convexa

$$E(u) = \frac{1}{2}|u|^2, \qquad u \in \mathcal{U}$$

es una función de entropía de (1) asociada a los flujos de entropía

$$\Psi^j(u) = -g^j(u) + u^T f^j(u),$$

$$u \in \mathcal{U},\ 1 \leq j \leq d$$

donde $g^j \in C^1(\mathcal{U}; \mathbb{R})$ es tal que $Dg^j = f^j$.

__Demostración__ Como el sistema es simétrica por el lema de Poincaré, existen

$g^j \in C^1(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ tales que $Dg^j = f^j$

Claramente, $\underbrace{DE(u) = u. \text{ Por lo tanto,}}_{=0}$

$$D\Psi^j(u)^T = -Dg^j(u)^T + f^j(u)^T + u^T A^j(u)$$

$$= DE(u)^T A^j(u), \quad \forall\ 1 \leq j \leq d, \ \forall\ u \in \mathcal{U}$$

$\Rightarrow (4)$. $\square$

<u>Lema</u> (Friedrichs - Lax)

Sea (1) es un sistema de LC con $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ abierto, acotado y <u>conexo</u>.

Si existe un par de entropía (E, Ψ) con $E \in C^2(\mathcal{U}; \mathbb{R})$ (estrictamente convexa) entonces el sistema (1) es simetrizable.

Asimismo, si $E \in C^2(\mathcal{U}; \mathbb{R})$ es estrictamente convexa tal que las matrices

$$D^2E(u)A^j(u), \quad 1 \leq j \leq d$$

son simétricas $\forall u \in \mathcal{U}$, entonces E es una función de entropía para el sistema (1).