Lección 1.1: Derivación fenomenológica. Ejemplos.

Sección 1: Generalidades

En la literatura científica llamamos sistemas hiperbólicos de leyes de conservación (SHLC) a sistemas de EDPs de la forma:

$$U_t + \sum_{j=1}^{d} f^j(U)_{x_j} = 0 \quad \cdots \quad (1)$$

que sean de tipo hiperbólico.

Aquí:
- $t \geq 0$ — variable temporal
- $x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$, $d \geq 1$
  d — dimensión del espacio físico.
  $d = 1,2,3$ en aplicaciones
- $U = U(x,t) \in \mathbb{R}^n$ — vector de variables de estado (o variables conservadas)
  $n \in \mathbb{N}$ — no. de variables de estado.
- Las funciones $f^j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $1 \leq j \leq d$ son mapeos suficientemente suaves $f^j \in C^2$, usualmente no lineales.
  (Se conocen como funciones de flujo.)

El sistema (1) expresa la conservación de las cantidades U_k, $1 \leq k \leq n$ en dominios arbitrarios del espacio físico, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$.
El flujo a través de $\partial\Omega$ de las variables conservadas U está determinado por las funciones de flujo, $f^j(U)$.

Hiperbolicidad - se definirá más adelante.

Particularidades:

- (1) tienen forma de divergencia espacio-temporal
- Interés práctico: muchos modelos en las ciencias tienen la forma de (1), de un (SHLC).
- Soluciones suaves de (1) existen sólo localmente en el tiempo: fenómeno de rompimiento a tiempo finito.
- Posibles soluciones discontinuas carecen de unicidad: requerimos criterios adicionales para seleccionar soluciones "físicamente relevantes" (entropía).
- No $\exists$ teoría matemática satisfactoria.

Historia

- s. XVIII - XIX: ecuaciones de Euler para un fluido compresible (paradigma de SHLC).
- s. XIX: condiciones de "salto" de Rankine-Hugoniot. $\longrightarrow$ onda de choque, problema de Riemann
- circa 1947: Courant, Friedrichs.
- Lax (CPAM: 1957): teoría matemática de (SHLC).
- Ecuación escalar ($n=1$): Oleinik (1963) Kruzkov (1970). $\exists!$ soluciones entrópicas

- Glimm (1970s): $\exists$ para sistemas $(n>1)$ en una dimensión $(d=1)$.
- Bianchini - Bressan (2000s): $\exists$ $(n>1, d=1)$ con aproximación viscosa.

Derivación fenomenológica

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, dominio arbitrario, abierto, acotado, $\partial\Omega$ suave (podemos aplicar el teorema de la divergencia).

Ley de balance: cantidades extensivas (masa, momento, energía, etc.) tienen un balance entre producción dentro de Ω (fuerzas externas o fuentes) con la variación de las cantidades extensivas en el tiempo y el flujo de ellas a través de $\partial\Omega$.

$$U(x,t) = \begin{pmatrix} U_1(x,t) \\ \vdots \\ U_n(x,t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

son densidades por unidad de volumen de las variables de estado.

Suponemos $U(x,t) \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$, abierto y conexo. (Dominio de variables de estado).

Definimos:

$$M(t) := \int_{\Omega} U(x,t)\, dx$$

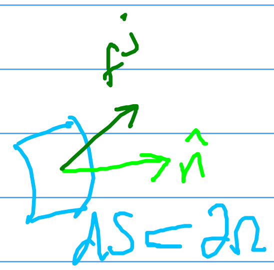
"masa total" de las variables conservadas en Ω a tiempo $t>0$.

Hipótesis: existe un tensor

$$F \in \mathbb{R}^{n\times d}$$

tal que la cantidad de U que fluye a través de un elemento $dS \subset \partial\Omega$ (cuya normal exterior es $\hat{n} \in \mathbb{R}^d$, $|\hat{n}| = 1$) está dada por:

$$-\underbrace{F}_{n\times d}\,\underbrace{\hat{n}}_{d\times 1}\, dS_x \quad \in \mathbb{R}^n$$



Flujo de U_j: $\quad -f^j \cdot \hat{n}\, dS_x$

La masa total de U que fluye a través de la frontera es

$$-\int_{\partial\Omega} F\hat{n}\, dS_x$$

$$F = \begin{pmatrix} f^1 & f^2 & \cdots & f^d \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times d}$$

$\mathbb{R}^{d\times 1} \ni f^j$ — j-ésima columna de F

Producción : interacción del sistema con campos externos ó términos de producción, representados por el campo

$$(x,t) \mapsto g(x,t) \in \mathbb{R}^n$$

g_j es la densidad por unidad de volumen del término de balance para la cantidad U_j.

Principio de balance :

$$\frac{dM(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\int_\Omega U(x,t)\, dx \qquad \cdots (2)$$

$$= -\int_{\partial\Omega} F\hat{n}\, dS_x + \int_\Omega g\, dx$$

Para cada componente, k fijo, $1 \leq k \leq n$,

$$\int_\Omega g_k\, dx = \frac{d}{dt}\int_\Omega U_k(x,t)\, dx +$$

$$+ \int_{\partial\Omega} \sum_{j=1}^{d} f_k^j n_j\, dS_x$$

teo. de la div.

$$= \frac{d}{dt}\int_\Omega U_k(x,t)\,dx + \int_\Omega \operatorname{div}_x \begin{pmatrix} f_k^1 \\ \vdots \\ f_k^d \end{pmatrix} dx$$

$$= \int_\Omega \left[\partial_t U_k + \sum_{j=1}^{d} \partial_{x_j}\left(f_k^j\right) \right] dx$$

$\Rightarrow$ para todo volumen Ω arbitrario:

$$\int_\Omega \left[\partial_t U_k + \sum_{j=1}^{d} \partial_{x_j} f_k^j - g_k \right] dx = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathbb{R}^n \ni \int_\Omega \left[\partial_t U + \sum_{j=1}^{d} \partial_{x_j} f^j - g \right] dx = 0$$

Suponiendo que el integrando es continuo concluimos que

$$\partial_t U + \sum_{j=1}^{d} \partial_{x_j} f^j = g$$

Modelación: SLC significa:

$$f^j = f^j(U)$$

Si $g = g(U)$, ley de balance

$g = g(x,t)$, forzamiento externo

$g \equiv 0$ ley de conservación.

En principio $\quad f^j = f^j(x,t,U,\nabla U, D^\alpha U,\dots)$

SLC:

$$\longrightarrow \quad U_t + \sum_{j=1}^{d} f^j(U)_{x_j} = 0$$

SLB:

$$U_t + \sum_{j=1}^{d} f^j(U)_{x_j} = g(U)$$

Ejemplos

(I) Ecuaciones de Euler para un fluido compresible.

$$\rho_t + \sum_{j=1}^{d} (\rho u_j)_{x_j} = 0 \qquad (3a)$$

$$(\rho u_i)_t + \underbrace{\sum_{j=1}^{d} (\rho u_i u_j)_{x_j} + p(\rho,e)_{x_i}}_{\rho u_i u_j + p} = 0 \qquad (3b)_i \quad i=1,\dots,d$$

$$\left(\rho\left(e+\tfrac{1}{2}|u|^2\right)\right)_t + \sum_{j=1}^{d} \left(\rho u_j\left(e+\tfrac{1}{2}|u|^2\right) + p u_j\right)_{x_j} = 0 \qquad (3c)$$

$\rho > 0$ densidad de masa (por unidad de volumen)

$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^d$ campo de velocidades

$e > 0$ densidad de energía interna

$E = e + \frac{1}{2}|u|^2$ " " " total.

Suponemos que $\exists$ ecuación de estado

$$P = P(\rho, e) \quad - \text{ presión termodinámica (dada)}$$

$$(3) \cdot\cdot \begin{cases} \rho_t + \operatorname{div}(\rho u) = 0 \\ (\rho u)_t + \operatorname{div}(\rho u \otimes u) + \nabla P = 0 \\ \left(\rho\left(e + \frac{1}{2}|u|^2\right)\right)_t + \operatorname{div}\left(\rho\left(e + \frac{1}{2}|u|^2\right)u + Pu\right) = 0 \end{cases}$$

$d \geq 1$, $\quad n = d + 2$

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u_1 \\ \vdots \\ \rho u_d \\ \rho\left(e + \frac{1}{2}|u|^2\right) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{d+2}$$

cantidades conservadas

$$=: \begin{pmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_n \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{R}^{(d+2)\times d} \ni F = ?$$