SISTEMAS HIPERBÓLICOS DE LEYES DE CONSERVACIÓN

CONTRACCIÓN EN LA NORMA L^1 (SECCIÓN 2)

12/02/2022

RAMÓN G. PLAZA

1. Contracción en la norma L^1

Consideremos una ley de conservación (o ley escalar) en una dimensión espacial, de la forma

$$u_t + f(u)_x = 0, \tag{1}$$

donde $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,\infty)$, $u(x,t) \in \Omega$, siendo $\Omega \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto y acotado (espacio de variables de estado), y la función de flujo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es de clase C^2. El problema de Cauchy asociado consiste en resolver (1) sujeta a una condición inicial,

$$u(x,0) = u_0(x), \tag{2}$$

donde $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$. Pondremos atención a la clase de soluciones débiles que son C^1 por pedazods, es decir, que tienen un número contable de discontinuidades Σ_k, $k \in \mathbb{N}$, y que fuera de ellas son soluciones clásicas (es decir, de clase C^1) de la ley de conservación (1). En este caso, se pueden calcular los límites por la derecha, u_R, y por la izquierda, u_L, sobre cada punto $P = (x,t)$ de cualquier discontinuidad Σ, tal y como se vio en clase.

Una solución débil de (1), de clase C^1 por pedazos, satisface la *condición de entropía generalizada* si en cada discontinuidad Σ se tiene que

$$\big(\alpha f(u_L) + (1-\alpha) f(u_R) - f(\alpha u_L + (1-\alpha) u_R)\big) \operatorname{sgn}[u] \le 0, \qquad \forall \alpha \in [0,1]. \tag{3}$$

Aquí $[u] := (u_R - u_L)$.

A continuación vamos a demostrar que la condición de entropía generalizada garantiza la unicidad de la solución entrópica al problema de Cauchy en la clase de soluciones C^1 por pedazos con un conjunto numerable de discontinuidades. Este resultado es una generalización del principio de contracción en L^1 para f estrictamente convexa probado por B. Quinn-Keyfitz [2] (véase también [1]).

Proposición 1.1. *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clase C^2 y sea $u_0 \in L^\infty$ (acotada). Si el problema de Cauchy (1) - (2), tiene una solución débil de clase C^1 por pedazos que satisface la condición de entropía generalizada, entonces es única.*

Esta proposición es consecuencia de un resultado más general.

Teorema 1.2 (contracción en la norma L^1)**.** *Sea f de clase C^2, y sean u y v dos soluciones débiles en la clase de funciones C^1 por pedazos, para las cuales todas sus discontinuidades satisfacen la condición de entropía generalizada. Entonces $\|u(t) - v(t)\|_{L^1}$ es una función no creciente de $t \ge 0$.*

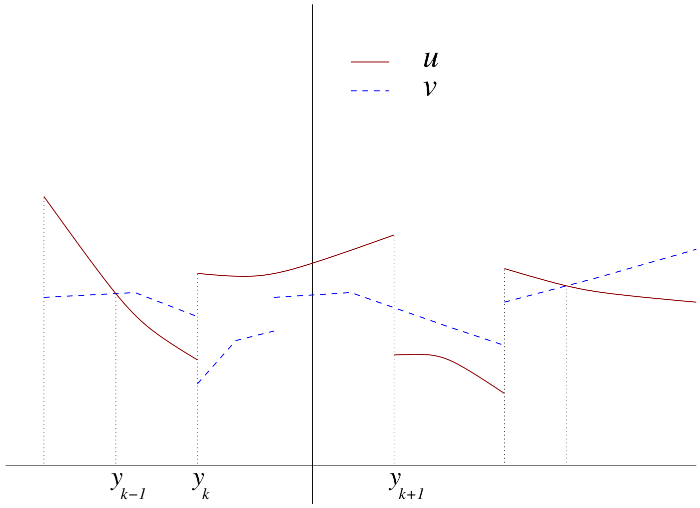

FIGURA 1. Elección de los puntos $y_k(t)$ para t fijo, tales que $\operatorname{sgn}(u(x,t)-v(x,t)) = (-1)^k$ para $x \in (y_k(t), y_{k+1}(t))$. La gráfica de u está representada por la línea continua (en rojo), y la de v por la línea punteada (en azul). Nótese que para cada k tenemos que, o bien $u(\cdot,t)$ y $v(\cdot,t)$ son continuas en $y_k(t)$ (punto donde $u=v$), o bien $y_k(t)$ es un punto de discontinuidad de u o de v.

Demostración. Sean u y v dos soluciones entrópicas de la ley de conservación (1), que satisfacen, en toda discontinuidad, la condición de entropía generalizada (3). Denotamos

$$w := u - v,$$

Asimismo, denotamos la norma L^1 de w como

$$r(t) := \|w(\cdot,t)\|_{L^1} = \int_{-\infty}^{\infty} |w(x,t)|\,dx = \sum (-1)^k \int_{y_k(t)}^{y_{k+1}(t)} (u-v)(x,t)\,dx, \qquad (4)$$

donde los puntos $y_k(t)$ son escogidos para cada t fijo de modo que

$$\operatorname{sgn}(u(x,t)-v(x,t)) = (-1)^k, \qquad \text{para cada } \ x \in (y_k(t), y_{k+1}(t)).$$

Los puntos y_k son funciones de t y la suma puede ser finita o infinita. La figura 1 muestra la forma de elegir los puntos y_k. Para cada k tenemos dos casos:

(i) $y_k(t)$ es un punto de continuidad, tanto de $u(\cdot,t)$ como de $v(\cdot,t)$. En estos puntos

$$u(y_k(t),t) = v(y_k(t),t).$$

(ii) $y_k(t)$ es un punto de discontinuidad de $u(\cdot,t)$ o de $v(\cdot,t)$. En este caso $y_k(t)$ denota una curva de discontinuidad que satisface la condición de entropía.

Dado que u y v satisfacen la ley de conservación en sentido débil, si son continuas en el intervalo (a,b) entonces satisfacen el principio de conservación en forma integral:

$$\frac{d}{dt}\int_a^b u(x,t)\,dx = f(u(a,t)) - f(u(b,t)) = \lim_{\epsilon\to 0^+} \big(f(u(a+\epsilon,t)) - f(u(b-\epsilon,t)) \big). \quad (5)$$

Por lo tanto, derivando (4) con respecto a t obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{dr}{dt} &= \sum(-1)^k \frac{d}{dt}\int_{y_k(t)}^{y_{k+1}(t)} (u-v)(x,t)\,dx \\ &= \sum(-1)^k \lim_{\epsilon\to 0^+}\Big((u-v)(y_{k+1}(t)-\epsilon,t)\frac{dy_{k+1}}{dt} - (u-v)(y_k(t)+\epsilon,t)\frac{dy_k}{dt} + \\ &\qquad + f(u(y_k(t)+\epsilon,t)) - f(u(y_{k+1}(t)-\epsilon,t)) + \\ &\qquad + f(v(y_{k+1}(t)-\epsilon,t)) - f(v(y_k(t)+\epsilon,t))\Big), \qquad (6) \\ &=: \sum(-1)^k(\rho_{k+1}-\rho_k),\end{aligned}$$

donde ρ_j representa al sumando que involucra a y_j, con $j = k+1$ o $j = k$. En el caso (i), u y v son continuas en y_k y además $u(y_k,t) = v(y_k,t)$, por lo que el sumando k en (6) es cero, y basta con sumar en la fórmula las contribuciones de los puntos de discontinuidad y_{k+1} de u, de v, o de ambos; es decir, es suficiente considerar el caso (ii). Supongamos, por ejemplo, que u es discontinua en y_{k+1}, el cual podría ser también un punto de discontinuidad de v. Si definimos

$$u_R := \lim_{\epsilon\to 0^+} u(y_{k+1}+\epsilon), \qquad v_R := \lim_{\epsilon\to 0^+} v(y_{k+1}+\epsilon),$$
$$u_L := \lim_{\epsilon\to 0^+} u(y_{k+1}-\epsilon), \qquad v_L := \lim_{\epsilon\to 0^+} v(y_{k+1}-\epsilon),$$

entonces podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $u_R < u_L$ (el caso contrario se analiza de manera análoga). Tenemos dos casos posibles:

(a): $v_L \in (u_R, u_L)$,
(b): $v_L \notin (u_R, u_L)$.

En el caso (a) el signo de $u-v$ es positivo en (y_k, y_{k+1}); por ende $(-1)^k = 1$ y k es par. Por la condición de Rankine-Hugoniot en la discontinuidad $y_{k+1}(t)$ de u,

$$\frac{dy_{k+1}}{dt} = \frac{f(u_R)-f(u_L)}{u_R-u_L}.$$

Por inspección de los términos de la suma en (6), el sumando $(-1)^k\rho_{k+1}$ tiene la forma

$$\begin{aligned}(-1)^k\rho_{k+1} = \rho_{k+1} &= \lim_{\epsilon\to 0^+}\Big((u-v)(y_{k+1}-\epsilon)\frac{dy_{k+1}}{dt} + f(v(y_{k+1}-\epsilon)) - f(u(y_{k+1}-\epsilon))\Big) \\ &= (u_L-v_L)\Big(\frac{f(u_R)-f(u_L)}{u_R-u_L}\Big) + f(v_L) - f(u_L).\end{aligned}$$

Notamos, sin embargo, que existe $\alpha = (v_L-u_R)/(u_L-u_R) \in (0,1)$, tal que $v_L = \alpha u_L + (1-\alpha)u_R$. Así, por la condición de entropía generalizada,

$$\begin{aligned}\rho_{k+1} &= f(v_L) - (\alpha f(u_L) + (1-\alpha)f(u_R)) \\ &= \operatorname{sgn}(u_R-u_L)\big(\alpha f(u_L) + (1-\alpha)f(u_R) - f(\alpha u_L + (1-\alpha)u_R)\big) \le 0.\end{aligned}$$

La contribución del sumando $(-1)^k\rho_{k+1}$ es no positiva.

En el caso (b) tenemos dos subcasos:

(b$_1$): $v_L \ge u_L$,
(b$_2$): $v_L \le u_R$.

En el caso (b$_1$) tenemos que si $v_L = u_L$ entonces el sumando es cero, $\rho_{k+1} = 0$. Así, supongamos que $v_L > u_L$. Entonces $u-v$ es negativo en (y_k, y_{k+1}) y $(-1)^k = -1$, es decir, k es impar. Notamos también que, necesariamente, $v_R \le u_R < u_L <$

v_L, ya que de otro modo el signo de $u - v$ seguiría siendo negativo a la derecha de y_{k+1}, contradiciendo la definición de los puntos y_k. Esto implica que y_{k+1} es también punto de discontinuidad de v, y la velocidad de la onda de choque se puede expresar también en términos de los valores de v, esto es,

$$\frac{dy_{k+1}}{dt} = \frac{f(v_R) - f(v_L)}{v_R - v_L}.$$

Dado que $u_L \in [v_R, v_L)$, entonces existe $\alpha = (u_L - v_R)/(v_L - v_R) \in [0,1)$, tal que $u_L = \alpha v_L + (1-\alpha)v_R$. De esta manera, usando la condición de entropía generalizada, obtenemos que

$$\begin{aligned}(-1)^k \rho_{k+1} = -\rho_{k+1} &= f(u_L) - f(v_L) + (v_L - u_L)\Big(\frac{f(v_R) - f(v_L)}{v_R - v_L}\Big) \\ &= \operatorname{sgn}(v_R - v_L)\big(f(\alpha v_L + (1-\alpha)v_R) - (\alpha f(v_L) + (1-\alpha) f(v_R))\big) \leq 0,\end{aligned}$$

y el sumando contribuye negativamente o cero. Similarmente se puede probar que la contribución del sumando es no positiva en el caso (b_2).

De este modo, hemos demostrado que la suma en (6) es no positiva, y por lo tanto,

$$\frac{dr(t)}{dt} \leq 0,$$

para todo $t > 0$. □ □

Demostración la proposición 1.1. Sean u y v dos soluciones del problema de Cauchy. Entonces $w = u - v$ tiene como condición inicial $w(0) = 0$ c.d.s. Por el teorema 1.2

$$0 \leq \|u(\cdot,t) - v(\cdot,t)\|_{L^1} \leq \|u(\cdot,0) - v(\cdot,0)\|_{L^1} = 0,$$

para todo $t \geq 0$, es decir, $w = 0$, c.d.s., y la solución es única. □

Referencias

[1] P. D. Lax, *Hyperbolic Systems of Conservation Laws and the Mathematical Theory of Shock Waves*, no. 11 in CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, SIAM, Philadelphia, 1973.

[2] B. K. Quinn, *Solutions with shocks: An example of an L_1-contractive semigroup*, Comm. Pure Appl. Math. **24** (1971), pp. 125–132.

Instituto de Investigaciones en Matemáticas Aplicadas y en Sistemas, Universidad Nacional Autónoma de México, Circuito Escolar s/n, C.P. 04510 Cd. de México (México)

Email address: plaza@mym.iimas.unam.mx