

SISTEMAS HIPERBÓLICOS DE LEYES DE CONSERVACIÓN

COMPORTAMIENTO ASINTÓTICO DE LA SOLUCIÓN DE LAX-HOPF

(SECCIÓN 2)

25/04/2022

RAMÓN G. PLAZA

1. COMPORTAMIENTO ASINTÓTICO DE LA SOLUCIÓN DE LAX-HOPF

Consideremos una ley de conservación (o ley escalar) en una dimensión espacial, de la forma

$$u_t + f(u)_x = 0, \quad (1)$$

donde $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, \infty)$, $u(x, t) \in \Omega$, siendo $\Omega \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto y acotado (espacio de variables de estado), y la función de flujo $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es de clase C^2 . El problema de Cauchy asociado consiste en resolver (??) sujeta a una condición inicial,

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad (2)$$

donde $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$.

En el caso *estrictamente convexo*, es decir, si $f''(u) \geq \delta > 0$ para todo $u \in \mathbb{R}$, la única solución entrópica a este problema está determinada por una fórmula explícita, conocida como la fórmula de Lax-Hopf.

Teorema 1.1 (fórmula de Lax-Hopf). *Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función estrictamente convexa, de clase C^2 que satisface*

$$f''(u) \geq \alpha > 0, \quad \text{para toda } u \in \mathbb{R},$$

$$f'(u) = a(u) \rightarrow \pm\infty, \quad \text{cuando } u \rightarrow \pm\infty.$$

Sea la condición inicial $u_0 \in L^\infty$ (acotada). Entonces el problema de Cauchy (1), (2) admite una única solución entrópica $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times [0, \infty); \mathbb{R})$, que satisface la desigualdad

$$f'(u(x_2, t)) - f'(u(x_1, t)) \leq \frac{x_2 - x_1}{t} \quad (3)$$

para toda $x_2 \geq x_1$ y toda $t > 0$. La solución entrópica está dada por la fórmula explícita

$$u(x, t) = g\left(\frac{x - y(x, t)}{t}\right), \quad (4)$$

donde $g = a^{-1}$ y $y(x, t)$ es el valor único que minimiza la función

$$y \mapsto G(x, t, y) = tf^*\left(\frac{x - y}{t}\right) + \int_0^y u_0(x) dx. \quad (5)$$

Aquí, f^ denota la transformada de Legendre de f .*

1.1. Comportamiento en la norma L^∞ . Una ventaja de contar con una fórmula explícita para la solución entrópica es que podemos estudiar directamente el comportamiento asintótico de dicha solución cuando $t \rightarrow \infty$. Vamos a suponer, adicionalmente, que normalizamos f de manera que $f(0) = 0$ (sin pérdida de generalidad, haciendo $f \rightarrow f - f(0)$ se preserva la regularidad y convexidad del flujo), y, además, que la condición inicial es integrable, es decir,

$$\int_{\mathbb{R}} |u_0(x)| dx \in \mathbb{R}. \quad (6)$$

Bajo estas hipótesis tenemos el siguiente

Lema 1.2 (comportamiento asintótico en la norma L^∞). *Existe una constante $C > 0$ tal que*

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty} \leq \frac{C}{\sqrt{t}}, \quad (7)$$

para toda $t > 0$.

Demostración. Sea $a_0 := a(0) = f'(0)$. Por lo tanto $g(a_0) = 0$ y $f^*(a_0) = a_0 g(a_0) - f(g(a_0)) = 0$, gracias a la normalización. Usando

$$\frac{df^*}{dv} = vg'(v) + g(v) - a(g(v))g'(v) = g(v),$$

tenemos también que $(f^*)'(a_0) = g(a_0) = 0$. Expandiendo f^* en serie de Taylor tenemos, para todo (x, t, y) ,

$$\begin{aligned} tf^*\left(\frac{x-y}{t}\right) &= tf^*\left(\frac{x-y-a_0t}{t} + a_0\right) \\ &= t\left(f^*(a_0) + (f^*)'(a_0)\left(\frac{x-y-a_0t}{t}\right) + \theta\left(\frac{x-y-a_0t}{t}\right)^2\right) \\ &= \theta\frac{|x-y-a_0t|^2}{t}, \end{aligned} \quad (8)$$

para cierto $\theta > 0$, ya que f^* es uniformemente convexa, y por lo tanto $(f^*)'' > 0$. Dado que u_0 es integrable,

$$\left|\int_0^y u_0(x) dx\right| \leq \|u_0\|_{L^1} =: M,$$

y, por ende,

$$G(x, t, y) = \int_0^y u_0(x) dx + tf^*\left(\frac{x-y}{t}\right) \geq -M + \frac{\theta}{t}|x-y-a_0t|^2.$$

Por otro lado,

$$G(x, t, x - a_0t) = tf^*(a_0) + \int_0^{x-a_0t} u_0(\zeta) d\zeta = \int_0^{x-a_0t} u_0(\zeta) d\zeta \leq M,$$

y en el mínimo $y = \hat{y}(x, t)$ de $G(x, t, y)$ para (x, t) fijo tenemos la estimación

$$M \geq G(x, t, x - a_0t) \geq G(x, t, \hat{y}(x, t)) \geq -M + \frac{\theta}{t}|x - \hat{y}(x, t) - a_0t|^2,$$

es decir,

$$|x - \hat{y}(x, t) - a_0t| \leq \frac{\sqrt{2M}}{\sqrt{\theta}}\sqrt{t}.$$

Esto implica que existe una constante $C > 0$ tal que

$$\frac{|x - \hat{y}(x, t) - a_0 t|}{t} \leq \frac{C}{\sqrt{t}}. \quad (9)$$

Finalmente, dado que g es Lipschitz y $g(a_0) = 0$, para cada $(x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty)$ obtenemos,

$$\begin{aligned} |u(x, t)| &= \left| g\left(\frac{x - \hat{y}(x, t)}{t}\right) \right| = \left| g\left(\frac{x - \hat{y}(x, t)}{t} - a_0 + a_0\right) - g(a_0) \right| \\ &\leq \tilde{C} \left| \frac{x - \hat{y}(x, t)}{t} - a_0 \right| \leq \frac{C}{\sqrt{t}}. \end{aligned}$$

Esto demuestra (7). \square

Observación 1.3. (a) La estimación (7) indica que la solución decae a cero cuando $t \rightarrow \infty$, a orden $O(t^{-1/2})$, en la norma L^∞ .

(b) Supongamos que la condición inicial tiene soporte compacto, y que vale cero fuera del intervalo $(-R, R)$ con $R > 0$. En este caso tenemos que la antiderivada

$$U_0(y) := \int_0^y u_0(x) dx,$$

es constante cuando $|y| \geq R$. De acuerdo con la estimación (9), el valor de $y = \hat{y}(x, t)$ que minimiza G para (x, t) fijo está localizado dentro del intervalo

$$x - a_0 t - C\sqrt{t} \leq y \leq x - a_0 t + C\sqrt{t}.$$

Si $x < a_0 t - C\sqrt{t} - R$ entonces $\hat{y} < -R$ donde el valor de U_0 es constante en y , y el mínimo de $G(x, t, y)$ se alcanza en el mínimo de $tf^*((x - y)/t)$, que es $\hat{y} = x - a_0 t$ (ya que $g(a_0) = 0$). Análogamente, si $x > a_0 t + C\sqrt{t} + R$ entonces el valor de y que minimiza G es $\hat{y} = x - a_0 t$. De este modo concluimos que $u(x, t) = 0$ si

$$|x - a_0 t| > C\sqrt{t} + R.$$

Gracias a la estimación (9) podemos decir que cada solución, cuyo dato inicial u_0 tiene soporte compacto, es, a tiempo $t > 0$, cero fuera de un intervalo con longitud de orden $O(\sqrt{t})$, mientras que dentro del intervalo u es de orden $O(1/\sqrt{t})$.

1.2. Comportamiento asintótico en la norma L^1 : ondas N . Vamos a dar un resultado más preciso del comportamiento asintótico de la fórmula de Lax-Hopf, que involucra a la topología L^1 . En virtud de la observación (1.3)(b), aparte de las hipótesis anteriores, supongamos además que

$$u_0 \text{ tiene soporte compacto.} \quad (10)$$

Definimos entonces los parámetros

$$d := f''(0) > 0, \quad p := -2 \min_{y \in \mathbb{R}} \int_{-\infty}^y u_0(x) dx, \quad q := 2 \max_{y \in \mathbb{R}} \int_y^{\infty} u_0(x) dx.$$

Observamos que como u_0 tiene soporte compacto, entonces

$$\int_{-\infty}^y u_0(x) dx \geq - \int_{\mathbb{R}} |u_0| dx > -\infty,$$

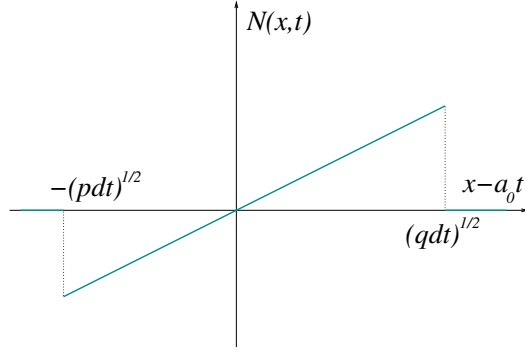


FIGURA 1. Forma de la onda N definida en (11), que se propaga con velocidad constante $a_0 = f'(0)$. La figura muestra la gráfica de $N(x, t)$ en el eje vertical, mientras que el eje horizontal corresponde a la coordenada móvil $x - a_0 t$. Nótese que la gráfica tiene la forma de una N invertida.

para toda y , es decir, el lado izquierdo está acotado inferiormente. Para $y_0 < 0$, con $|y_0|$ suficientemente grande (esto es, $(-\infty, y_0)$ fuera del soporte de u_0), se tiene que

$$\int_{-\infty}^y u_0(x) dx = 0.$$

Por lo tanto

$$-\infty < \inf_{y \in \mathbb{R}} \int_{-\infty}^y u_0(x) dx \leq 0.$$

Como la integral es continua en y tenemos un mínimo no positivo, por lo cual $p \geq 0$. Del mismo modo se puede verificar que $q \geq 0$. Finalmente,

$$g'(a_0) = \frac{1}{f''(0)} = \frac{1}{d} > 0.$$

La observación 1.3(b) motiva directamente la siguiente definición.

Definición 1.4 (onda N). *Dados los parámetros $p, q \geq 0$, $d > 0$ y $a_0 \in \mathbb{R}$, definimos la onda N como*

$$N(x, t) := \begin{cases} \frac{1}{d} \left(\frac{x}{t} - a_0 \right), & -\sqrt{pdt} < x - a_0 t < \sqrt{qdt}, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (11)$$

Para t fijo, la onda (11) luce tal y como se muestra en la figura 1. Notamos que la onda N se propaga con velocidad constante a_0 y que, en el eje de referencia móvil $\xi := x - a_0 t$, ésta tiene la forma de una “ N ” invertida; de ahí el nombre de onda N .

Ejemplo 1.5 (onda N para la ecuación de Burgers). *Consideremos la ecuación de Burgers no viscosa*

$$u_t + \left(\frac{1}{2} u^2 \right)_x = 0,$$

con condición inicial

$$u_0(x) = \begin{cases} -1, & -1/2 < x < 0, \\ 1, & 0 < x < 1/2, \\ 0, & \text{otro caso.} \end{cases} \quad (12)$$

Claramente u_0 tiene soporte compacto, es acotada y además es integrable con

$$\int_{\mathbb{R}} u_0(x) dx = 0.$$

Dado que la función de flujo es $f(u) = \frac{1}{2}u^2$, los parámetros en cuestión están dados por $a_0 = f'(0) = 0$ y $d = f''(0) = 1$. Además, claramente tenemos que

$$\int_{-\infty}^y u_0(x) dx = \begin{cases} -y - 1/2, & -1/2 \leq y \leq 0, \\ y - 1/2, & 0 \leq y \leq 1/2, \\ 0, & \text{otro caso,} \end{cases}$$

por lo cual $p = -2 \min_{y \in \mathbb{R}} \int_{-\infty}^y u_0(x) dx = 1 > 0$. Análogamente $q = 1 > 0$. De este modo, la onda N asociada a la ecuación de Burgers con condición inicial (12) tiene la forma

$$N(x, t) = \begin{cases} x/t, & |x| < \sqrt{t}, \\ 0, & |x| > \sqrt{t}. \end{cases} \quad (13)$$

Notamos que en la región $|x| < \sqrt{t}$ la onda N es una onda de rarefacción, la cual está flanqueada en ambos lados por ondas de choque cuyas amplitudes decaen como $O(1/\sqrt{t})$ y que se propagan con velocidades $\pm 1/2\sqrt{t}$. La onda de choque que se propaga a la derecha tiene como estados derecho e izquierdo a $u_R = 0$ y a $u_L = 1/\sqrt{t}$, respectivamente, de modo que la condición de Rankine-Hugoniot se satisface. Lo mismo sucede con la onda de choque que se propaga a la izquierda. Un esquema de la solución (13) se puede apreciar en la figura 2.

Observación 1.6. Notamos que si se cumple que $p = q = 0$ para los invariantes de la condición inicial (lo cual ocurre, por ejemplo, cuando la condición inicial es $u_0 = 0$), claramente la onda N asociada y definida en (11) es la solución idénticamente cero. Por esta razón, para estudiar el comportamiento asintótico de la solución entrópica, supondremos que $p > 0$ y $q > 0$.

Teorema 1.7. Si $p > 0$ y $q > 0$ entonces existe una constante $C > 0$ tal que

$$\|u(\cdot, t) - N(\cdot, t)\|_{L^1} \leq \frac{C}{\sqrt{t}}, \quad (14)$$

para todo $t > 0$ suficientemente grande.

Demostración. Dado que g es de clase C^1 , podemos hacer la expansión

$$u(x, t) = g\left(\frac{x - a_0 t - \hat{y}(x, t)}{t} + a_0\right) = g'(a_0)\left(\frac{x - a_0 t - \hat{y}(x, t)}{t}\right) + O\left(\left|\frac{x - a_0 t - \hat{y}(x, t)}{t}\right|^2\right),$$

ya que $g(a_0) = 0$. En virtud de que $g'(a_0) = 1/d$, y por la estimación (9), obtenemos

$$\left|u(x, t) - \frac{1}{d}\left(\frac{x - a_0 t - \hat{y}(x, t)}{t}\right)\right| \leq \frac{C}{t}. \quad (15)$$

Por hipótesis, u_0 tiene soporte compacto; por lo tanto existe $R > 0$ tal que $u_0 = 0$ fuera de $|x| \leq R$. Así,

$$\int_0^y u_0(x) dx = \begin{cases} W_+, & y \geq R, \\ W_-, & y \leq -R, \end{cases}$$

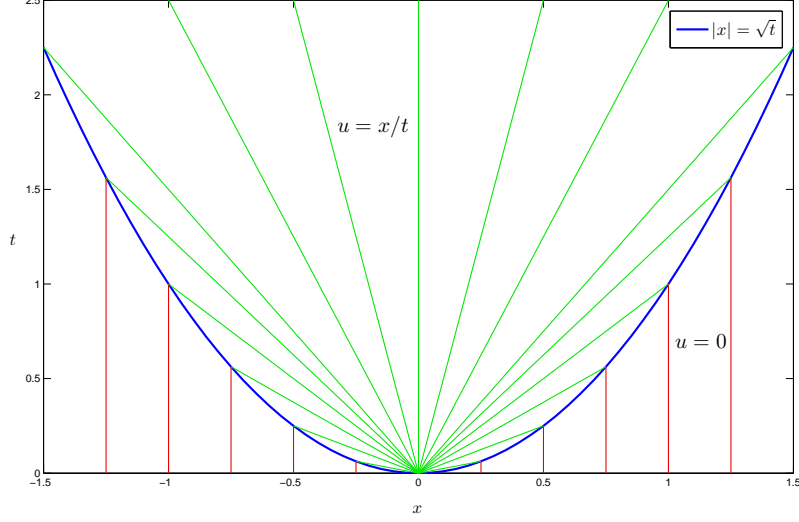


FIGURA 2. Esquema de la onda $N = N(x, t)$ en el plano (x, t) , definida en (13) para la ecuación de Burgers $u_t + (\frac{1}{2}u^2)_x = 0$, con condición inicial (12). La solución autosimilar $u = x/t$ está limitada por las curvas $x = \pm\sqrt{t}$.

para valores constantes W_{\pm} , dados por

$$W_- := - \int_{-R}^0 u_0(x) dx, \quad W_+ := \int_0^R u_0(x) dx.$$

Denotemos

$$W(y) := \int_0^y u_0(x) dx.$$

De esta manera,

$$W(y) = \int_{-\infty}^y u_0(x) dx + \int_0^{-R} u_0(x) dx,$$

ya que $u_0 = 0$ para $y \leq -R$. Por lo tanto,

$$\min_{y \in \mathbb{R}} W(y) = \min_{y \in \mathbb{R}} \int_{-\infty}^y u_0(x) dx + W_- = -\frac{1}{2}p + W_-. \quad (16)$$

Igualmente es posible verificar que $\min_{y \in \mathbb{R}} W(y) = -\frac{1}{2}q + W_+$. Definimos ahora la razón de decaimiento $\mathcal{E}(t)$ como

$$\mathcal{E}(t) := \frac{A}{\sqrt{t}}, \quad (17)$$

para $t > 0$, siendo $A > 0$ una constante que definiremos más adelante. Vamos a demostrar que para una $A > 0$ apropiada:

$$u(x, t) = 0 \quad \text{si} \quad x - a_0 t < -R - (pd(1 + \mathcal{E}(t))t)^{1/2}, \quad (18)$$

$$u(x, t) = 0 \quad \text{si} \quad x - a_0 t > R + (qd(1 + \mathcal{E}(t))t)^{1/2}. \quad (19)$$

Dado que $d = f''(0) > 0$, notamos que $(f^*)''(a_0) = 1/a'(0) = 1/f''(0) = 1/d > 0$. De este modo, usando las estimaciones (8) y (9) obtenemos

$$tf^*\left(\frac{x-y}{t}\right) = \theta \frac{|x-y-a_0t|^2}{t} = \frac{1}{d} \frac{|x-y-a_0t|^2}{2t} + O(1/\sqrt{t}).$$

para todo (x, t, y) . Así,

$$G(x, t, y) = \frac{1}{d} \frac{|x-y-a_0t|^2}{2t} + W(y) + O(1/\sqrt{t}). \quad (20)$$

Consideremos el caso $x - a_0t < -R - (pd(1 + \mathcal{E}(t))t)^{1/2}$. Entonces $W(x - a_0t) = W_-$, ya que $x - a_0t < -R$, y por lo tanto

$$tf^*\left(\frac{x - (x - a_0t)}{t}\right) + W(x - a_0t) = tf^*(a_0) + W_- = W_-.$$

Si $y \leq -R$ entonces

$$tf^*\left(\frac{x-y}{t}\right) + W(y) \geq W_-, \quad (21)$$

ya que $W(y) = W_-$ si $y \leq -R$ y $f^* \geq 0$. (Recordemos que, por la normalización, $f^*(u) = ug(u) - f(g(u))$ tiene un mínimo global en $u = a_0$ y $f^*(a_0) = 0$.) Por otra parte, si $y \geq -R$, usamos (20) y (16) para estimar

$$\begin{aligned} tf^*\left(\frac{x-y}{t}\right) + W(y) &\geq \frac{1}{d} \frac{|x-y-a_0t|^2}{2t} + W(y) + O(1/\sqrt{t}) \\ &\geq \frac{1}{2}p(1 + \mathcal{E}(t)) + W_- - \frac{1}{2}p + O(1/\sqrt{t}) \\ &\geq \frac{1}{2}p \frac{A}{\sqrt{t}} + W_- + O(1/\sqrt{t}). \end{aligned}$$

Tomando $A > 0$ suficientemente grande se obtiene $\frac{1}{2}pA/\sqrt{t} + O(1/\sqrt{t}) \geq 0$, por lo cual hemos probado que si se cumple $x - a_0t < -R - (pd(1 + \mathcal{E}(t))t)^{1/2}$ entonces tenemos la cota

$$tf^*\left(\frac{x-y}{t}\right) + W(y) \geq W_-, \quad (22)$$

para todo $y \in \mathbb{R}$. Esto implica, a su vez, que vamos a alcanzar el mínimo sólo cuando $y = \hat{y}(x, t) = x - a_0t$ ya que $W(x - a_0t) = W_-$ y $f^*(a_0) = 0$. De esta forma

$$u(x, t) = g\left(\frac{x - \hat{y}(x, t)}{t}\right) = g(a_0) = 0,$$

lo cual demuestra (18). La demostración de (19) es análoga.

Ahora probemos que, para A y t suficientemente grandes,

$$\hat{y}(x, t) \geq -R \quad \text{si} \quad x - a_0t = R - (pd(1 - \mathcal{E}(t))t)^{1/2}. \quad (23)$$

Sabemos que si $y \leq -R$ la desigualdad (21) se cumple. Sea $z \in \mathbb{R}$ tal que $W(z) = \min_{y \in \mathbb{R}} W(y) = -\frac{1}{2}p + W_-$, con $|z| \leq R$. Sustituyendo $y = z$ en (20) obtenemos,

$$\begin{aligned} G(x, t, z) &= tf^*\left(\frac{x-z}{t}\right) + W(z) \\ &= \frac{1}{d} \frac{|x-y-a_0t|^2}{2t} + W(y) + O(1/\sqrt{t}) \\ &\leq \frac{1}{d} \frac{pd(1-\mathcal{E}(t))t}{2t} + W_- - \frac{1}{2}p + O(1/\sqrt{t}) \\ &\leq -\frac{p}{2} \frac{A}{\sqrt{t}} + W_- + O(1/\sqrt{t}) \\ &< W_-, \end{aligned}$$

si A es suficientemente grande. Por lo tanto, si $x - a_0t = R - (pd(1-\mathcal{E}(t))t)^{1/2}$, el mínimo $\hat{y}(x, t)$ debe encontrarse en $\hat{y}(x, t) \geq -R$. Un argumento similar nos permite demostrar que

$$\hat{y}(x, t) \leq R \quad \text{si} \quad x - a_0t = -R + (qd(1-\mathcal{E}(t))t)^{1/2}. \quad (24)$$

Sabemos que el mapeo $x \mapsto \hat{y}(x, t)$ es no decreciente para $t > 0$ fijo. Por lo tanto, usando (23) y (24), obtenemos la siguiente cota para $\hat{y}(x, t)$,

$$|\hat{y}(x, t)| \leq R \quad \text{si} \quad R - (pd(1-\mathcal{E}(t))t)^{1/2} < x - a_0t < -R + (qd(1-\mathcal{E}(t))t)^{1/2}, \quad (25)$$

para $t > 0$ suficientemente grande. Usando la estimación (15) obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{C}{t} &\geq \left| u(x, t) - \frac{1}{d} \left(\frac{x - a_0t - \hat{y}(x, t)}{t} \right) \right| \\ &\geq \left| u(x, t) - \frac{1}{d} \left(\frac{x}{t} - a_0 \right) \right| - \left| \frac{\hat{y}(x, t)}{td} \right| \\ &\geq \left| u(x, t) - \frac{1}{d} \left(\frac{x}{t} - a_0 \right) \right| - \frac{R}{td}. \end{aligned}$$

Esto implica que

$$\left| u(x, t) - \frac{1}{d} \left(\frac{x}{t} - a_0 \right) \right| \leq \frac{\tilde{C}}{t}, \quad (26)$$

para $R - (pd(1-\mathcal{E}(t))t)^{1/2} < x - a_0t < -R + (qd(1-\mathcal{E}(t))t)^{1/2}$.

Finalmente vamos a descomponer la norma L^1 de $u - N$ en integrales en distintos intervalos sobre los cuales usaremos las estimaciones anteriores. Escribimos,

$$\|u(\cdot, t) - N(\cdot, t)\|_{L^1} = \int_{-\infty}^{\infty} |u(x, t) - N(x, t)| dx = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5,$$

donde

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{-\infty}^{-R-(pd(1+\mathcal{E}(t))t)^{1/2}+a_0t} |N(x, t)| dx, \\
I_2 &= \int_{-R-(pd(1+\mathcal{E}(t))t)^{1/2}+a_0t}^{R-(pd(1-\mathcal{E}(t))t)^{1/2}+a_0t} |u(x, t) - N(x, t)| dx, \\
I_3 &= \int_{R-(pd(1-\mathcal{E}(t))t)^{1/2}+a_0t}^{-R+(qd(1-\mathcal{E}(t))t)^{1/2}+a_0t} |u(x, t) - N(x, t)| dx, \\
I_4 &= \int_{-R+(qd(1-\mathcal{E}(t))t)^{1/2}+a_0t}^{R+(qd(1+\mathcal{E}(t))t)^{1/2}+a_0t} |u(x, t) - N(x, t)| dx, \\
I_5 &= \int_{R+(qd(1+\mathcal{E}(t))t)^{1/2}+a_0t}^{\infty} |N(x, t)| dx,
\end{aligned}$$

para $t > 0$ suficientemente grande y en vista de (18) y (19). Notamos inmediatamente que $I_1 = I_5 = 0$ ya que, por definición, $N(x, t) = 0$ para $x < -(pdt)^{1/2}$ y $x > (qdt)^{1/2}$. Usando la estimación (26), obtenemos

$$I_3 \leq \frac{C}{t} (2R + (qd(1 - \mathcal{E}(t))t)^{1/2} + (pd(1 - \mathcal{E}(t))t)^{1/2}) \leq \frac{\tilde{C}}{\sqrt{t}}.$$

Dado que $N = 0$ si $x < -(pdt)^{1/2} + a_0t$, descomponemos I_2 de la siguiente manera,

$$I_2 = \int_{-R-(pd(1+\mathcal{E}(t))t)^{1/2}+a_0t}^{-(pdt)^{1/2}+a_0t} |u(x, t)| dx + \int_{-(pdt)^{1/2}+a_0t}^{R-(pd(1-\mathcal{E}(t))t)^{1/2}+a_0t} |u(x, t) - N(x, t)| dx.$$

Observamos también que, por definición de la onda N , tenemos la razón de decaimiento $|N(x, t)| \leq C/\sqrt{t}$, en virtud de que $N = (1/d)(x/t - a_0)$ para $x - a_0t \leq O(t^{1/2})$. Por lo tanto, usando la estimación (7), podemos acotar I_2 de la siguiente forma

$$I_2 \leq \frac{C}{\sqrt{t}} (-(pdt)^{1/2} + R - (pd(1 + \mathcal{E}(t))t)^{1/2}) + \frac{\tilde{C}}{\sqrt{t}} (R - (pd(1 - \mathcal{E}(t))t)^{1/2} + (pdt)^{1/2}).$$

Expandiendo en serie de Taylor,

$$\begin{aligned}
(t(1 \pm \mathcal{E}(t)))^{1/2} - t^{1/2} &= (t \pm At^{1/2})^{1/2} - t^{1/2} \approx \frac{1}{2}t^{-1/2}(\pm At^{1/2}) + O(t^{-1/2}) \\
&= O(1) + O(t^{-1/2}) = O(1),
\end{aligned}$$

para $t > 0$ suficientemente grande; así, concluimos que $I_2 \leq C/\sqrt{t}$. La integral I_4 se estima de manera análoga. Esto prueba (14) y concluimos la demostración del teorema. \square