Curso Avanzado de Ecuaciones Diferenciales
Introducción a Sistemas de Leyes de Conservación
Semestre 2011-II

Tarea 2

Fecha de entrega: 26 de abril, 2011.

1. Considera la ecuación
$$u_t + (\tfrac{1}{3}u^3)_x = 0,$$
con condición inicial $u_0(x) = e^{x/2}$. ¿Existen soluciones clásicas globales a este problema? Si no es así, ¿se forman singularidades a tiempo finito?

2. *Onda N para la ecuación de Burgers.* Sea la ecuación de Burgers
$$u_t + (\tfrac{1}{2}u^2)_x = 0. \tag{1}$$
Definimos la onda N como
$$N(x,t) = \begin{cases} x/t, & |x| < \sqrt{t}, \\ 0, & |x| > \sqrt{t}. \end{cases} \tag{2}$$
   (a) Prueba que (2) es una solución débil de la ecuación de Burgers con condición inicial $u_0 \equiv 0$.
   (b) Prueba que (2) satisface la condición de entropía de Oleinik,
$$u(x+\epsilon) - u(x,t) < \frac{C\epsilon}{t}, \qquad \epsilon > 0, \tag{3}$$
   a lo largo de ambas discontinuidades.
   (c) Explica porqué, sin embargo, N *no* es la solución entrópica a un problema de Cauchy (la única solución entrópica con $u_0 \equiv 0$ es la solución cero).

3. *Choques débiles.* Decimos que la tripleta de valores constantes $(u_R, u_L, s) \in \Omega \times \Omega \times \mathbb{R}$ es una *discontinuidad admisible* si se cumplen la condición de Rankine-Hugoniot y la desigualdad de entropía de Lax. Para una discontinuidad admisible:

   (a) Prueba que cuando $[u] \to 0$ la velocidad s es de la forma
$$s = f'(u_L) + O_1([u]) = f'(u_R) + O_2([u]),$$
   donde cada O_i es una función de orden $\mathcal{O}(|[u]|)$.

(b) Prueba que, más precisamente,

$$s = f'(\tfrac{1}{2}(u_R + u_L)) + \mathcal{O}([u]^2).$$

Nota: Si el choque es *débil*, es decir, si $0 < \epsilon := |[u]| \ll 1$ es pequeño, la fórmula anterior indica que $f'(\frac{1}{2}(u_R + u_L))$ aproxima la velocidad del choque a orden $\mathcal{O}(\epsilon^2)$.

4. Encuentra explícitamente la única solución entrópica al problema de Cauchy para la ecuación de Burgers (1) con condición inicial

$$u(x,0) = u_0(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}$$

5. Sea la ecuación $u_t + f(u)_x = 0$, con $f(u) = (u^2 - 1)^2$. Resuelve el problema de Cauchy con condición inicial

$$u_0(x) = \begin{cases} -1, & x < -1, \\ a & -1 < x < 1, \\ 1, & x > 1, \end{cases}$$

donde $1/3 < a < 1$.

6.