Curso Avanzado de Ecuaciones Diferenciales
Introducción a Sistemas de Leyes de Conservación
Semestre 2011-II

Tarea 1

Fecha de entrega: 10 de marzo, 2011.

1. Considere las ecuaciones de Euler para un fluído compresible en varias dimensiones espaciales

$$\begin{aligned}\rho_t + \mathrm{div}_x(\rho v) &= 0,\\ (\rho v)_t + \mathrm{div}_x(\rho v \otimes v) + \nabla p &= 0,\\ (\rho(e + \frac{1}{2}|v|^2))_t + \mathrm{div}_x(\rho v(e + \frac{1}{2}|v|^2) + pv) &= 0,\end{aligned} \tag{1}$$

donde $x \in \mathbb{R}^3$, $t > 0$, $\rho > 0$, $e > 0$ y la ecuación de estado está determinada por una función $p = \hat{p}(\rho, e)$.

(a) Demuestre que si $\rho > 0$ entonces es posible transformar el sistema a un sistema cuasi-lineal equivalente en las variables $w := (\rho, v, e)^\top \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$, de la forma

$$\begin{aligned}\rho_t + (\nabla_x \rho)^\top v + \rho\,\mathrm{div}_x v &= 0,\\ v_t + (\nabla_x v)^\top v + \frac{1}{\rho}\nabla_x p &= 0,\\ e_t + (\nabla_x e)^\top v + \frac{p}{\rho}\,\mathrm{div}_x v &= 0.\end{aligned} \tag{2}$$

(b) Pruebe que el determinar la hiperbolicidad del sistema se reduce a examinar la diagonalizabilidad sobre $\mathbb{R}$ de la siguiente matriz de 5×5,

$$A(w, \xi) = \begin{pmatrix} v \cdot \xi & \rho \xi^\top & 0 \\ \frac{\hat{p}_\rho}{\rho}\xi & (v \cdot \xi) I & \frac{\hat{p}_e}{\rho}\xi \\ 0 & \frac{\hat{p}}{\rho}\xi^\top & v \cdot \xi \end{pmatrix}, \tag{3}$$

donde I es la matriz identidad de 3×3, $v = (v_1, v_2, v_3)^\top$ y $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)^\top \in \mathbb{R}^3$, $\xi \neq 0$.

(c) Demuestre que la matriz $A(w, \xi)$ tiene como valores propios a $v \cdot \xi$, y a $v \cdot \xi \pm c|\xi|$, donde $c > 0$ es la velocidad del sonido, definida por

$$c^2 := \hat{p}_\rho + \frac{\hat{p}\hat{p}_e}{\rho^2}.$$

(d) Verifique que cuando $c^2 > 0$, el valor propio $v \cdot \xi$ es semi-simple con multiplicidad $m = 3$ y con tres vectores linealmente independientes, y que los valores propios $v \cdot \xi \pm c|\xi|$ son simples. Concluya que el sistema es hiperbólico si y sólo si $c^2 > 0$, mas no estrictamente hiperbólico.

2. Considere el sistema de ecuaciones para agua poco profunda en dos dimensiones

$$
\begin{aligned}
\eta_t + (\eta u)_x + (\eta v)_y &= 0, \\
(\eta u)_t + \left(\tfrac{1}{2} g \eta^2 + \eta u^2\right)_x + (\eta u v)_y &= 0, \\
(\eta v)_t + (\eta u v)_x + \left(\tfrac{1}{2} g \eta^2 + \eta v^2\right)_y &= 0,
\end{aligned}
\tag{4}
$$

donde $\eta = \eta(x, y, t) > 0$ es la altura del fluído, y $(u, v)(x, y, t) \in \mathbb{R}^2$ es el campo de velocidades bidimensional. La constante $g > 0$ es la constante de gravedad.

(a) Pruebe que las matrices jacobianas asociadas a las funciones de flujo del sistema son

$$
A^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -u^2 + g\eta & 2u & 0 \\ -uv & v & u \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -uv & v & u \\ -v^2 + g\eta & 0 & 2v \end{pmatrix}.
$$

(b) Calcule los valores propios de $A = \xi_1 A^1 + \xi_2 A^2$, con $\xi \in \mathbb{R}^2$, $\xi \neq 0$, y pruebe que el sistema es hiperbólico si $\eta > 0$.

(c) Encuentre un simetrizador S del sistema (4).

3. Pruebe que en una dimensión espacial, es decir, si $d = 1$, entonces todo sistema *hiperbólico* cuasi-lineal de la forma

$$
u_t + A(u) u_x = 0,
$$

con $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty)$ y donde $u \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, $A \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$, es simetrizable.

4. Conside el sistema de ecuaciones de Euler en el caso barotrópico

$$
\begin{aligned}
\rho_t + (\rho v)_x &= 0, \\
(\rho v)_t + (\rho v^2 + p)_x &= 0,
\end{aligned}
\tag{5}
$$

que es un caso especial de las ecuaciones de Euler en el que la energía interna e permanece constante. Aquí $\rho > 0$, v y p son la densidad, velocidad y presión, respectivamente. Supongamos que $p = \hat{p}(\rho)$ es la *ecuación de estado barotrópica*, donde $\hat{p} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable que satisface la condición $\hat{p}'(\rho) > 0$.

(a) Muestre que el sistema (5) es estrictamente hiperbólico y calcule las velocidades características.

(b) Pruebe que la función

$$E = \tfrac{1}{2}\rho v^2 + G(\rho) = E(u_1, u_2),$$

es una función de entropía para el sistema (5) si se cumple que $G''(\rho) = \hat{p}'(\rho)/\rho$ para $\rho > 0$. Aquí $(u_1, u_2) = (\rho, \rho v)$. Verifique que E es convexa para toda $\rho > 0$ en las variables (u_1, u_2). ¿Cual es el flujo de entropía Ψ correspondiente?