Ecuaciones Diferenciales I - Tarea 9

Fecha de entrega: 18 de noviembre, 2011.

1. (2 pts.) Considera el problema de valores inciales

$$y' = t^2 + y^2, \qquad y(0) = 0,$$

con $y \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$, y sea R el rectángulo

$$R = \{(t, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \, : \, |t| < a, \, |y| < b\},$$

donde $a, b > 0$.

   (a) Prueba que la solución existe y es única para

$$|t| < \min\{a, b/(a^2 + b^2)\}.$$

   (b) Prueba que el valor mínimo de $b/(a^2 + b^2)$ para a fijo es $1/(2a)$.

   (c) Prueba que $\alpha = \min\{a, \frac{1}{2}a\}$ es máximo cuando $a = 1/\sqrt{2}$.

   (d) Concluye que la solución existe para todo $0 \leq t \leq 1/\sqrt{2}$.

2. (1 pt.) Encuentra una solución al problema de valores iniciales

$$y' = t\sqrt{1 - y^2}, \qquad y(0) = 1,$$

distinta de $y(t) \equiv 1$. ¿Esto viola el teorema de Picard? Explica tu respuesta.

3. Considera el problema de valores iniciales

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2^2 + 1, \\ y_2' &= y_1^2, \end{aligned}$$

$$y_1(0) = 0, \quad y_2(0) = 0.$$

   (a) (1 pt.) Si el problema se escribe en forma $y' = f(t, y)$, con $y \in \mathbb{R}^2$ y $y(0) = y_0$, encuentra f y y_0.

   (b) (1 pt.) Muestra que f satisface las condiciones del teorema de Picard en el rectángulo

$$R = \{(t, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \, : \, |t| \leq 1, |y| \leq 1\}.$$

   Encuentra un cota $M > 0$ para f, la constante de Lipschitz $L > 0$ en y de f, y el tiempo de existencia α.

4. (2 pts.) Para cualquier condición inicial $y(t_0) = y_0$, prueba que la solución a la ecuación

$$t^3 + yy' = 0,$$

existe, es única, y está definida para toda $t \in \mathbb{R}$. (*Hint:* Encuentra una cota *a priori* para $|y(t)|$.)

5. Considera la ecuación del péndulo simple ideal

$$\theta'' + \sin\theta = 0,$$

con condiciones iniciales $\theta(0) = \theta_0$, $\theta'(0) = \omega_0$.

   (a) (1 pt.) Prueba que la energía total del sistema

   $$E = \tfrac{1}{2}\theta'(t)^2 - \cos\theta(t),$$

   es constante.

   (b) (2 pts.) Prueba que la solución existe para todo $t \in \mathbb{R}$. (*Hint:* Establece las cotas *a priori* para $|\theta'(t)|$ y $|\theta(t) - \theta_0|/t$. Define el conjunto compacto

   $$\mathcal{D}_* = \{(t, \theta, \theta') \in \mathbb{R}^3 \, : \, |\theta - \theta_0| \leq 2T\sqrt{2E}, \, |\theta'| \leq 2\sqrt{2E}, \, |t| \leq T\},$$

   con $T > 0$ arbitrario. Aplica el teorema visto en clase y concluye.)