Ecuaciones Diferenciales I - Tarea 8

Fecha de entrega: 14 de octubre, 2011.

En esta tarea el símbolo $\mathcal{L}$ denota la transformada de Laplace.

1. Sea $a > 0$.

   (a) (1 pt.) Prueba que
   $$\mathcal{L}\left(\frac{\sin at}{2a^3} - \frac{t\cos at}{2a^2}\right)(s) = \frac{1}{(s^2+a^2)^2}.$$

   (b) (1 pt.) Encuentra una función $t \mapsto f(t)$ tal que
   $$\mathcal{L}(f(t))(s) = \frac{s}{(s^2+a^2)^2}.$$
   (Hint: Usa la identidad $\mathcal{L}(tf(t))(s) = -(d/ds)(\mathcal{L}(f(t))(s))$.

2. Usando la transformada de Laplace, encuentra la solución a los siguientes problemas de valores iniciales:

   (a) (1 pt.) $y'' - 3y' + 2y = e^{3t}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

   (b) (2 pts.) $y'' + (2/t)y' + y = 0$, $\lim_{t\to 0^+} y(t) = 1$, $y(\pi) = 0$.

   (c) (2 pts.) $y'' + 2y' + 2y = h(t)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, donde
   $$h(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t \le \pi, \\ 1, & \pi < t < 2\pi, \\ 0, & t \ge 2\pi. \end{cases}$$

3. Considera el problema de valores inciales:
   $$y'' + \gamma y' + y = \delta(t-1),$$
   con $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$. Aquí el forzamiento $\delta(t-1)$ representa un pulso localizado en $t_0 = 1$. La constante $\gamma > 0$ es el coeficiente de amortiguamiento.

   (a) (1 pt.) Encuentra la solución si $\gamma = \frac{1}{2}$. Haz un dibujo de la solución.

   (b) (1 pt.) Encuentra el tiempo $t = t_1$ para el cual la solución alcanza un valor máximo que denotamos por $y(t_1) = y_1$.

   (c) (1 pt.) Repite los incisos (a) y (b) para $\gamma = \frac{1}{4}$. Extrapola y determina cómo dependen los valores t_1 y y_1 en función de γ cerca de cero. ¿Cuál es el límite de t_1 y de y_1 cuando $\gamma \to 0^+$?