Ecuaciones Diferenciales I - Tarea 7

Fecha de entrega: 7 de octubre, 2011.

1. (1 pt.) Encuentra la solución general a la ecuación

$$y'' + \frac{1}{4t^2} y = \cos t, \qquad t > 0.$$

(*Hint:* Verifica que $y_1(t) = \sqrt{t}$ es solución de la ecuación homogénea asociada.)

2. (1 pt.) Considera un sistema mecánico descrito por la ecuación

$$y'' + \tfrac{1}{4} y' + 2y = 2\cos(\omega t), \qquad y(0) = 0, \;\; y'(0) = 2.$$

Encuentra la solución al problema de valores iniciales e identifica la parte de la solución que se denomina "estacionaria". Encuentra la amplitud A de la solución estacionaria como función de ω, y encuentra el máximo valor de A, así como la frecuencia a la cual ocurre.

3. Aplica el método de variación de parámetros para encontrar la solución general a cada una de las siguientes ecuaciones de segundo orden:

   (a) (1 pt.) $y'' - 2y' + y = e^t/(1+t^2)$.

   (b) (2 pts.)

$$y'' - \left(\frac{t+2}{t}\right) y' + \left(\frac{t+2}{t^2}\right) y = 2t, \qquad t > 0.$$

   Hint: Una solución de la homogénea es $y_1(t) = te^t$.

4. (a) (1 pt.) Sea el operador $Ly = y'' - 2ry' + r^2 y$ con $r \in \mathbb{R}$, constante. Prueba que

$$L(e^{rt} v(t)) = e^{rt} v''(t).$$

   (b) (2 pts.) Encuentra la solución general a la ecuación

$$y'' - 6y' + 9y = t^{3/2} e^{3t}.$$

5. Considera la ecuación

$$y'' + y = f(t),$$

donde f es una función continua en el intervalo $t \in [1, +\infty)$ que satisface

$$\int_1^{+\infty} |f(t)|\, dt < +\infty.$$

   (a) (1 pt.) Usando el método de variación de parámetros, demuestra que una solución particular es

$$y_p(t) = \int_1^t \sin(t-s) f(s)\, ds.$$

   (b) (1 pt.) Prueba que toda solución de la ecuación es acotada en el intervalo $[1, +\infty)$.