Ecuaciones Diferenciales I - Tarea 6

Fecha de entrega: 30 de septiembre, 2011.

1. Resuelve las siguientes ecuaciones lineales de segundo orden:

   (a) (1 pt.) $y'' + 5y' + 6y = 0$. (Encuentra la solución general.)

   (b) (1 pt.) $y'' + 2y' + 2y = 0$, con condiciones iniciales $y(\pi/4) = 2$, $y'(\pi/4) = -2$.

   (c) (1 pt.) $y'' + 2\alpha y' + \alpha^2 y = 0$, con $\alpha > 0$ constante. ¿Qué pasa cuando $t \to +\infty$?

2. (a) (1 pt.) Prueba que $y_1(t) = \sqrt{t}$ y $y_2(t) = 1/t$ son soluciones de la ecuación diferencial
$$2t^2 y'' + 3ty' - y = 0,$$
para $t \in I = (0, +\infty)$.

   (b) (1 pt.) Calcula el wronskiano, $W[y_1, y_2](t)$. ¿Qué sucede cuando $t \to 0$? Prueba que y_1 y y_2 son linealmente independientes en el intervalo $I = (0, +\infty)$.

   (c) (1 pt.) Resuelve el problema con valores iniciales $y(1) = 2$, $y'(1) = 1$.

3. (2 pts.) Sea $y = y(t)$ una solución de la ecuación
$$y'' + p_0 y' + q_0 y = 0,$$
donde p_0 y q_0 son constantes. Si
$$v(t) = e^{p_0 t/2} y(t),$$
prueba que v satisface una ecuación de la forma $v'' + kv = 0$, donde k es una constante. Calcula la constante k.

4. (2 pts.) La ecuación diferencial
$$y'' + \delta(ty' + y) = 0, \qquad \delta > 0,$$
ocurre en la descripción de flujo turbulento de una corriente uniforme que pasa sobre un cilindro circular. Verifica que $y_1(t) = e^{-\delta t^2/2}$ es una solución, y mediante el método de reducción de orden, encuentra la solución general en forma de una integral.