Ecuaciones Diferenciales I - Tarea 4

Fecha de entrega: 9 de septiembre, 2011.

1. (2 pts.) Considera la ecuación

$$\frac{dy}{dt} = y(y-2)(y+1)$$

Dibuja el campo de tangentes para esta ecuación y discute el comportamiento de la solución con condición inicial $y(0) = 1$. ¿Cuál es el comportamiento si $y(0) = -2$?

3. Considera la ecuación $y' + (\cos t)y = e^{-\sin t}$.

   (a) (1 pt.) Encuentra la solución que satisface $y(\pi) = \pi$.

   (b) (1 pt.) Prueba que cualquier solución y tiene la propiedad que $y(\pi k) - y(0) = \pi k$ para todo entero k.

4. (1 pt.) Asumiendo que y es una función con derivada continua en $t \in [0,1]$, que satisface la desigualdad $y' - 2y \leq 1$ para todo $t \in [0,1]$, con $y(0) = 1$; prueba que

$$y(t) \leq \tfrac{3}{2}e^{2t} - \tfrac{1}{2},$$

para todo $0 \leq t \leq 1$.

5. (3 pts.) Encuentra la solución a los siguientes problemas de valores iniciales:

   (a) $y' + 3y = t + e^{-2t}$, $y(0) = 1$

   (b) $y' + (2/t)y = (\cos t)/t^2$, $y(\pi) = 0$, $t > 0$

   (c) $ty' + 2y = t^2 - t + 1$, $y(1) = 1/2$, $t > 0$.

6. (2 pts.) Demuestra que si a y λ son constantes positivas, y b es cualquier número real, entonces cada solución de la ecuación

$$\frac{dy}{dt} + ay = be^{-\lambda t},$$

satisface $y \to 0$ cuando $t \to +\infty$. (*Hint:* Considera los casos $a = \lambda$ y $a \neq \lambda$ separadamente.)