Ecuaciones Diferenciales I - Examen Parcial 3

Fecha de entrega: 30 de noviembre, 2011. Salón O-122, 11:00hrs.

Instrucciones: Responde las siguientes preguntas. Total: 25 pts.

1. (a) (1 pt.) Verifica que la matriz

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} t & t^3 \\ 1 & 3t^2 \end{pmatrix}, \qquad t > 0,$$

es una matriz fundamental del sistema $y' = A(t)y$, con

$$A(t) = \frac{1}{t^2} \begin{pmatrix} 0 & t^2 \\ -3 & 3t \end{pmatrix}, \qquad t > 0.$$

(b) (1 pt.) Sea $W(t) = \det \Phi(t)$. Demuestra, mediante un cálculo directo, que

$$W(t) = W(1) \exp \left(\int_1^t \operatorname{tr} A(s)\, ds \right).$$

2. (3 pts.) Prueba que

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t} \cos t & -\sin t \\ e^{-2t} \sin t & \cos t \end{pmatrix},$$

es una matriz fundamental del sistema lineal homogéneo, no autónomo,

$$y' = A(t)y,$$

$$A(t) = \begin{pmatrix} -2\cos^2 t & -1 - \sin 2t \\ 1 - \sin 2t & -2\sin^2 t \end{pmatrix}.$$

Encuentra la inversa de $\Phi(t)$, y usa la fórmula de variación de parámetros para resolver el sistema no homogéneo

$$y' = A(t)y + f(t),$$

$$f(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ e^{-2t} \end{pmatrix},$$

con condición inicial $y(0) = (1, 0)^\top \in \mathbb{R}^2$.

3. Considera la ecuación homogénea

$$u''' - 5u'' + 6u' = 0, \qquad t \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

(a) (1 pt.) Haciendo $y = (u, u', u'')^\top \in \mathbb{R}^3$, escribe la ecuación (1) como un sistema de primer orden de la forma

$$y' = Ay. \tag{2}$$

(b) (1 pt.) Encuentra una matriz fundamental $\Phi(t)$ para (2). (*Hint:* Las funciones $u = 1, e^{2t}, e^{3t}$ son soluciones de (1).)

(c) (1 pt.) Calcula $W(t) = \det \Phi(t)$.

(d) (1 pt.) Verifica que

$$W(t) = W(0) \exp\left(\int_0^t 5\, ds\right) = e^{5t} W(0).$$

(e) (2 pts.) Encuentra la solución u de (1) con condiciones iniciales $u(0) = 0, u'(0) = 1, u''(0) = 0$.

4. (2 pts.) Encuentra e^A para las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Prueba que si y es un vector propio de A con valor propio asociado λ, entonces y también es un vector propio asociado a e^A con valor propio e^λ. Calcula los valoes propios de las matrices e^A, donde A está dado en (3).

5. Aplica el algoritmo de Putzer para encontrar e^{At} en cada uno de los siguientes casos:

(a) (1 pt.) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

(b) (2 pts.) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

6. (2 pts.) Para cada uno de los siguientes sistemas de la forma

$$y' = Ay,$$

encuentra *una* matriz fundamental $\Phi(t)$, así como *la* matriz fundamental $\Omega(t)$ tal que $\Omega(0) = I$.

(a) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

(b) $A = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

7. (4 pts.) Para cada uno de los siguiente sistemas de la forma

$$y' = Ay,$$

describe la solución general y su comportamiento cuando $t \to +\infty$. ¿Qué tipo de punto de equilibrio es el origen (punto silla, centro, nodo, foco, estable, inestable, etc.)?

(a) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

(b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$

(c) $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

(d) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

8. (2 pts.) Demuestra que todas las soluciones al sistema

$$y' = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} y,$$

con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, tienden a cero cuando $t \to +\infty$ si y sólo si $a + d < 0$ y $ad - bc > 0$.

9. (1 pt.) ¿Para qué valores de α y β el sistema

$$y' = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & 2 \end{pmatrix} y, \qquad y \in \mathbb{R}^2,$$

tiene un "pozo" en el origen?

- **Extra:** (+1 pt.) Encuentra la solución al sistema

$$y' = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} y, \qquad y \in \mathbb{R}^2,$$

y haz un esbozo de su retrato fase. Determina la estabilidad del origen.