

Ecuaciones Diferenciales I
Semestre 2022-2

Tarea 7

Fecha de entrega: 6 de mayo, 2022.

1. (1 pt.) Encuentra la solución general a la ecuación

$$y'' + \frac{1}{4t^2}y = \cos t, \quad t > 0.$$

(*Hint*: Verifica que $y_1(t) = \sqrt{t}$ es solución de la ecuación homogénea asociada.)

2. (2 pts.) Considera un sistema mecánico descrito por la ecuación

$$y'' + \frac{1}{4}y' + 2y = 2 \cos(\omega t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2.$$

Encuentra la solución al problema de valores iniciales e identifica la parte de la solución que se denomina “estacionaria”. Encuentra la amplitud A de la solución estacionaria como función de ω y encuentra el máximo valor de A , así como la frecuencia de resonancia a la cual ocurre.

3. Aplica el método de variación de parámetros para encontrar la solución general a cada una de las siguientes ecuaciones de segundo orden:

(a) (1 pt.) $y'' - 2y' + y = e^t/(1 + t^2)$.

- (b) (2 pts.)

$$y'' - \left(\frac{t+2}{t}\right)y' + \left(\frac{t+2}{t^2}\right)y = 2t, \quad t > 0.$$

Hint: Una solución de la homogénea es $y_1(t) = te^t$.

4. (2 pts.) Sea el operador $Ly = y'' - 2ry' + r^2y$ con $r \in \mathbb{R}$, constante. Prueba que $L(e^{rt}v(t)) = e^{rt}v''(t)$. Aplica esta observación para encontrar la solución general a la ecuación

$$y'' - 6y' + 9y = t^{3/2}e^{3t}, \quad t > 0.$$

5. Considera la ecuación

$$y'' + y = f(t),$$

donde f es una función continua en el intervalo $t \in [1, \infty)$ que satisface

$$\int_1^\infty |f(t)| dt < +\infty.$$

- (a) (1 pt.) Usando el método de variación de parámetros, demuestra que una solución particular es

$$y_p(t) = \int_1^t \sin(t-s)f(s) ds.$$

- (b) (1 pt.) Prueba que toda solución de la ecuación es acotada en el intervalo $[1, \infty)$.

Total: 10 pts.