# Ecuaciones Diferenciales I

**Semestre 2022-2**

**Tarea 5**

Fecha de entrega: 8 de abril, 2022.

**1.** (2 pts.) Supongamos que $\psi$ satisface la ecuación $\psi' + a\psi = b_1(t)$, y que $\phi$ satisface $\phi' + a\phi = b_2(t)$, donde $b_1, b_2 : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son continuas y $a \in \mathbb{R}$ es constante.

(a) Prueba que $\xi = \psi + \phi$ satisface $\xi' + a\xi = b_1(t) + b_2(t)$.

(b) Aplica el inciso (a) para encontrar la solución $y = y(t)$ de la ecuación

$$y' + y = \sin t + 3\cos(2t),$$

cuya gráfica pasa por el origen.

**2.** Mediante el método de sustitución apropiado, encuentra la forma general de las primitivas o, respectivamente, resuelve el problema de valores iniciales, para las siguientes ecuaciones diferenciales no lineales de primer orden:

(a) (1 pt.) (Similaridad.) $t^2y' - t^2 - ty - y^2 = 0$.

(b) (1 pt.) (Bernoulli). $y' = \epsilon y - \sigma y^3$, donde $\epsilon > 0$ y $\sigma > 0$ son constantes, y $y(0) = 1$. Esta ecuación aparece en el estudio de estabilidad en fluidos.

(c) (1 pt.) (Riccati). Encuentra una solución particular $y = y_r(t)$ a la ecuación

$$y' = \frac{y^2}{\cos t} - y\tan t + \cos t.$$

Aplica la transformación apropiada para hallar la solución general. (*Sugerencia:* No intentes verificar que la solución final es, en efecto, solución de la ecuación diferencial.)

(d) (2 pts.) (Inversión de $y'$). $(ty' - y)(yy' + t) = 2y'$. (*Sugerencia:* Usa el cambio de variables $u = y^2, v = t^2$ y encuentra la ecuación para $du/dv = p$. El resultado es una ecuación tipo Clairaut cuya primitiva es conocida.) ¿Existe alguna solución singular?

(e) (2 pts.) (d'Alembert) Encuentra todas las primitivas de la ecuación $y = -ty' + 3t^4(y')^2$. ¿Existe alguna solución singular?

**3.** (1 pt.) Resuelve el siguiente problema con valores iniciales:

$$y' - \frac{y\log y}{1+t} = (1+t)y, \qquad y(0) = 1.$$

(La función $\log(\cdot)$ indica logaritmo *natural*, es decir, con base $e$.)

Total: 10 pts.