

Ecuaciones Diferenciales I
Semestre 2022-2

Tarea 1

Fecha de entrega: 4 de marzo, 2022.

1. (3 pts.) Un tanque contiene 1000 litros de agua. A partir de cierto momento ($t = 0$), se empieza a verter en el tanque contaminante industrial a razón de 1 litro por minuto, y se deja salir la mezcla de agua y contaminante exactamente a la misma razón. Encuentra la concentración de contaminante en el tanque al tiempo $t > 0$. ¿Cuánto tiempo se necesita para que la concentración de contaminante en el tanque sea de 20%?

2. En el modelo de crecimiento económico de Solow, reemplazamos la hipótesis de que el capital es proporcional a la producción y supongamos que, de hecho, el capital se deteriora con el tiempo, es decir,

$$\frac{dK}{dt} = -rK + sQ,$$

donde $r > 0, s > 0$. La ecuación para L es nuevamente $dL/dt = \lambda L$, y $Q = L^{2/3}K^{1/3}$ es la función de Cobb-Douglas.

(a) (1 pt.) Demuestra que la ecuación para $k = K/L$ es

$$\frac{dk}{dt} = sk^{1/3} - (\lambda + r)k.$$

(b) (2 pts.) Encuentra los puntos de equilibrio de este nuevo modelo y describe el comportamiento asintótico de todas las soluciones cuando $t \rightarrow \infty$, suponiendo que $k(0) = k_0 > 0$. Compara con el modelo de Solow visto en clase. Interpreta tu resultado en términos del desarrollo económico.

3. Supongamos que la población de la Cd. de México obedece la ley logística

$$\frac{dp}{dt} = \frac{1}{25}p(1 - p),$$

donde t se mide en años y p en millones de personas, despreciando la migración y la tasa de homicidios.

(a) (2 pts.) Modifica este modelo para tomar en cuenta el hecho de que 9000 personas por año se mudan a otro lugar, y que 1000 personas son asesinadas cada año. Justifica tu respuesta.

(b) (2 pts.) Usando el nuevo modelo del inciso (a), y si la población de la Cd. de México era de 8 millones en 1970, encuentra la población para cualquier tiempo futuro. ¿Qué sucede si $t \rightarrow \infty$?

Total: 10 pts.