Lección 5.5 : El algoritmo de Putzer.

Teorema Sea $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) $\exists$ una norma $\|\cdot\|_a$ en $\mathbb{R}^n$ y un $b>0$ tal que $\forall\, v \in \mathbb{R}^n$

$$\|e^{tA} v\|_a \leq e^{-bt} \|v\|_a , \quad \forall t \geq 0.$$

(b) Si $\|\cdot\|_g$ es cualquier norma en $\mathbb{R}^n$ entonces $\exists$ $C>0$ y $\eta>0$ tales que

$$\|e^{tA} v\|_g \leq C e^{-\eta t} \|v\|_g$$

$\forall\, v \in \mathbb{R}^n$, $\forall\, t>0$.

(c) Todos los valores propios de A tienen $\operatorname{Re}\lambda < 0$.

Corolario: Si se cumple (c) entonces la solución $y(t) \equiv 0$ de

$$y' = Ay$$

es asintóticamente estable, es decir, toda solución con $y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^n$, tiende a 0 si $t \to \infty$.

Ref. Carmen Chicone, ODE, Springer.

Algoritmo de Putzer

Equivalente a la FCJ para calcular la solución de

$$Y' = AY \qquad \cdots \quad (1)$$

con

$$Y(0) = Y_0 \qquad \cdots \quad (2)$$

Definición Para cualquier polinomio

$$p(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \dots + a_m\lambda^m$$

se define

$$p(A) = a_0 I + a_1 A + \dots + a_m A^m \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

Teorema (Cayley-Hamilton)

Sea $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, $p(\lambda) := \det(A - \lambda I)$.
Entonces $p(A) = 0$.

Teorema (algoritmo de Putzer)

Sea $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, con valores propios $\lambda_j \in \mathbb{C} \supset \mathbb{R}$, $1 \le j \le n$. Entonces

$$e^{tA} = \sum_{j=0}^{n-1} r_{j+1}(t) P_j \qquad \cdots \quad (3)$$

donde :

- $P_j \in \mathbb{C}^{n\times n}$,

$$P_0 \equiv I_n, \qquad P_j = \prod_{k=1}^{j} (A - \lambda_k I), \quad 1 \le j \le n$$

- las funciones $r_j \in C^1$, escalares, $r_j \in \mathbb{C}$, son soluciones del sistema triangular

$$(4) \;.. \begin{cases} r_1' = \lambda_1 r_1, & r_1(0) = 1 \\ r_j' = r_{j-1} + \lambda_j r_j, & r_j(0) = 0 \\ & 2 \le j \le n \end{cases}$$

Observaciones:

(i) Los valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ pueden aparecer repetidos. El orden en el producto

$$\prod_{k=1}^{j} (A - \lambda_k I)$$

no es importante ya que $A - \lambda_k I$ y $A - \lambda_j I$ conmutan. Por convención suponemos que $A - \lambda_j I$ precede a $A - \lambda_k I$ si $j > k$.

(ii) El algoritmo funciona si λ_j, r_j, P_j son complejos. Sin embargo, el resultado siempre ~~es~~ es una matriz real e^{tA}.

__Demostración__ Sea $\Phi(t) := \sum_{j=0}^{n-1} r_{j+1}(t) P_j$

Por demostrar : $\begin{cases} \Phi'(t) = A\,\Phi(t) \\ \Phi(0) = I. \end{cases}$

Por T∃! $\Phi(t) = e^{tA}$.

Notación : $r_0(t) \equiv 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

Derivando :

$$\Phi'(t) = \sum_{j=0}^{n-1} r_{j+1}'(t) P_j$$
$$\underset{(4)}{=} \sum_{j=0}^{n-1} \left(\lambda_{j+1} r_{j+1}(t) + r_j(t) \right) P_j$$

Por lo tanto,

$$\Phi'(t) - \lambda_n \Phi(t) = \sum_{j=0}^{n-1} (\lambda_{j+1} - \lambda_n) r_{j+1}(t) P_j + $$
$$+ \sum_{j=0}^{n-1} r_j(t) P_j$$
$$= \sum_{j=0}^{n-2} (\lambda_{j+1} - \lambda_n) r_{j+1}(t) P_j + \sum_{j=0}^{n-2} r_{j+1}(t) P_{j+1}$$
$$= \sum_{j=0}^{n-2} \left[(\lambda_{j+1} - \lambda_n) P_j + (A - \lambda_j I) P_j \right] r_{j+1}(t)$$

$P_{j+1} = (A - \lambda_{j+1} I) P_j$

$$= \sum_{j=0}^{n-2} (A - \lambda_n I) P_j r_{j+1}(t)$$

$$= (A - \lambda_n I) \sum_{j=0}^{n-2} P_j r_{j+1}(t)$$

$$= (A - \lambda_n I) \left[\sum_{j=0}^{n-1} r_{j+1}(t) P_j - r_n(t) P_{n-1} \right]$$

$$= (A - \lambda_n I) \left[\Phi(t) - r_n(t) P_{n-1} \right]$$

$$= (A - \lambda_n I) \Phi(t) - \underbrace{(A - \lambda_n I) P_{n-1}}_{= P_n = \prod_{k=1}^{n} (A - \lambda_k I) = p(A) = 0} r_n(t)$$

$$\Rightarrow \quad \Phi'(t) - \cancel{\lambda_n \Phi(t)} = A \Phi(t) - \cancel{\lambda_n \Phi(t)}$$

$$\therefore \quad \Phi'(t) = A \Phi(t).$$

Por las condiciones iniciales de $r_1(0) = 1$, $r_j(0) = 0 \quad \forall\, j \geq 2$ queda claro que

$$\Phi(0) = r_1(0) P_0 = I$$

$\square$

Ejemplos :

(A) Valores propios repetidos

$$y' = Ay, \quad y \in \mathbb{R}^3, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & 2 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (2-\lambda)(1-\lambda)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = 2.$$

Putzer: $\quad P_0 = I \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

$$P_1 = A - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = A - I$$

$$P_2 = (A - \lambda_2 I)(A - \lambda_1 I) = (A - I)^2$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Sistema triangular:

- $r_1' = \lambda_1 r_1, \quad r_1(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad r_1(t) = e^t$
- $r_2' = \lambda_2 r_2 + r_1 \quad \Rightarrow \quad r_2' - r_2 = e^t$
  $r_2(0) = 0$
  $r_2(t) = te^t$
- $r_3' = \lambda_3 r_3 + r_2 \quad \Rightarrow \quad r_3' - 2r_3 = te^t$
  $r_3(0) = 0$
  $\Rightarrow r_3(t) = e^{2t} - (1+t)e^t$

$\therefore$

la matriz fundamental es

$$e^{tA} = r_1(t) P_0 + r_2(t) P_1 + r_3(t) P_2$$

$$= \begin{pmatrix} e^t & te^t & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ e^t - e^{2t} & e^{2t} - (1+t)e^t & e^{2t} \end{pmatrix}$$

Ejercicio: verificar que es la solución fundamental principal en $t=0$.

(B) Valores propios complejos

$$y' = Ay, \quad y \in \mathbb{R}^2, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

Putzer: $\lambda_1 = i, \quad \lambda_2 = -i$

$$P_0 \equiv I, \quad P_1 = A - iI = \begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix}$$

$$P_2 = (A+iI)(A-iI) = \begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sistema triangular:

- $r_1' = i r_1, \quad r_1(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad r_1(t) = e^{it}.$

- $r_2' = e^{it} - ir_2 \,, \qquad r_2(0) = 0$

$$\Rightarrow \quad r_2(t) = \frac{1}{2i}\left(e^{it} - e^{-it}\right) = \sin t$$

Así,

$$e^{tA} = r_1(t)\, P_0 + r_2(t)\, P_1$$

$$= e^{it} I + \sin t \begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{it} - i\sin t & \sin t \\ -\sin t & e^{it} - i\sin t \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Estabilidad

Sistema con coef. constantes:

$$y' = Ay \qquad \cdots \qquad (1)$$

$A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.

$\sigma(A)$ determina el comportamiento asintótico de las soluciones.

Comencemos con $n = 2$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

$a_{ij} \in \mathbb{R}$.

Tenemos 3 casos. El espectro de A es:

(a) $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_j \in \mathbb{R}$

(b) $\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$

(c) $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \overline{\lambda_1} = \alpha - i\beta$
$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$.

FCJ $\Rightarrow$ $\exists$ $S \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ no singular tal que

$$A = S^{-1} B S$$

con: (a) $B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, $\lambda_j \in \mathbb{R}$

(b) $B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

(c) $B = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$, $\beta \neq 0$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$e^{tA} = S^{-1} e^{tB} S$. Hay que calcular e^{tB}.