Lección 5.2 : Fórmula de Lioiuville. Variación de parámetros.

Sistema lineal homogéneo:

$$y' = A(t)y \qquad \cdots (1)$$

donde $A \in C(J; \mathbb{R}^{n\times n})$, $J \subseteq \mathbb{R}$ intervalo.

Sistema fundamental de soluciones:

$$y_1(t), \ldots, y_n(t), \qquad y_j \in C^1(J; \mathbb{R}^n)$$

son linealmente independientes.

Matriz fundamental:

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) & \cdots & y_n(t) \\ \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix}$$

$$\Phi' = A(t)\Phi, \qquad \Phi \in C^1(J; \mathbb{R}^{n\times n}).$$

<u>Definición</u> Sea $\{y_j(t)\}_{j=1}^n$ una colección de soluciones de (1). El Wronskiano de esta colección se define como:

$$W(t) := \det \begin{bmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \cdots & y_n(t) \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix} \qquad \cdots (2)$$

$\forall\, t \in J$

Lema (fórmula de Liouville)

$\{Y_j(t)\}_{j=1}^n$ colección de n soluciones de (1). Sea $t_0 \in J$, arbitrario. Entonces,

$$W(t) = \underline{W(t_0)} \exp\left(\int_{t_0}^{t} \operatorname{tr} A(s)\, ds \right) \cdots (3)$$

$\forall\, t \in J$, $\quad \operatorname{tr} A = \sum_{j=1}^{n} A_{jj}$

Demostración Notación:

$$\mathbb{R}^n \ni Y_j(t) = \begin{bmatrix} y_{1j}(t) \\ y_{2j}(t) \\ \vdots \\ y_{nj}(t) \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \Psi(t) = \begin{pmatrix} Y_1(t) & \cdots & Y_n(t) \\ \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{11}(t) & y_{12}(t) & \cdots & y_{1n}(t) \\ y_{21}(t) & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ y_{n1}(t) & & & y_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

Wronskiano $\quad W(t) = \det \Psi(t), \quad t \in J.$

Expansión por cofactores:

$$W(t) = \sum_{j=1}^{n} y_{ij}(t)\, |W_{ij}(t)|, \qquad \forall\ 1 \le i \le n \ \underline{\text{fijo}}$$

$$|W_{ij}(t)| = (-1)^{i+j} \sum (\cdots) \quad \text{cofactor } (i,j) \text{ de } W(t).$$

$|W_{ij}(t)|$ <u>no</u> depende de $y_{ij}(t)$.

Por lo tanto, si denotamos

$$W(t) = \tilde{W}\left(y_{11}(t), y_{12}(t), \ldots, y_{nn}(t)\right)$$

función de n^2 variables

entonces, $\forall\ 1 \leq j \leq n$ fijo

$$\frac{\partial \tilde{W}}{\partial y_{ij}} = |W_{ij}(t)|$$

Así,

$$\frac{dW}{dt} = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial \tilde{W}}{\partial y_{ij}} \frac{dy_{ij}}{dt}$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} |W_{ij}(t)| \frac{dy_{ij}}{dt}$$

$$=: \sum_{i=1}^{n} Q_i(t)$$

con $$Q_i(t) = \sum_{j=1}^{n} |W_{ij}(t)| \frac{dy_{ij}}{dt}.$$

Pero, $$\frac{dy_j}{dt} = A(t)\, y_j \quad , \quad \forall\ 1 \leq j \leq n$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy_{ij}}{dt} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}(t)\, y_{kj}$$

$$\Rightarrow \quad Q_i(t) = \sum_{j=1}^{n} |W_{ij}(t)| \sum_{k=1}^{n} A_{ik}(t) Y_{kj}(t)$$

El lado derecho es la expansión por cofactores del determinante

$$\Rightarrow \quad Q_i(t) = \det \begin{bmatrix} Y_{11} & \cdots & Y_{1n} \\ \vdots & & \\ \frac{dY_{i1}}{dt} & \cdots & \frac{dY_{in}}{dt} \\ \vdots & & \vdots \\ Y_{n1} & \cdots & Y_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \det \begin{bmatrix} Y_{11} & \cdots & Y_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} A_{ik} Y_{k1} & & \sum_{k=1}^{n} A_{ik} Y_{kn} \\ \vdots & & \vdots \\ Y_{n1} & \cdots & Y_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\forall \ 1 \leq i \leq n.$$

Multiplicando el renglón $k \neq i$ por $-A_{ik}(t)$ y sumando al renglón i no cambia el valor del determinante. Hacemos $\forall \ k \neq i$. Obtenemos

$$Q_i(t) = \det \begin{bmatrix} Y_{11} & \cdots & Y_{1n} \\ \vdots & & \\ A_{ii} Y_{i1} & \cdots & A_{ii} Y_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ Y_{n1} & \cdots & Y_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= A_{ii}(t)\, W(t), \qquad \forall\ 1 \leq i \leq n.$$

concluimos que

$$\frac{dW}{dt} = \sum_{i=1}^{n} Q_i(t) = \sum_{i=1}^{n} A_{ii}(t)\, W(t)$$

$$= (\operatorname{tr} A(t))\, W(t), \qquad \forall t \in J.$$

Integrando,

$$W(t) = W(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^{t} \operatorname{tr} A(s)\, ds \right)$$

$\square$

Observación:

- $W(t) \equiv 0, \quad \forall t \in J$ (linealm. dep.)

ó, $W(t) \neq 0$, " (sistema fundamental).

Corolario una condición necesaria y suficiente para tener un sistema fundamental de soluciones es que $W(t_*) \neq 0$ para algún $t_* \in J$.

Corolario La única solución al problema de Cauchy:

$$\left.\begin{aligned} y' &= A(t)y \\ y(t_0) &= y_0 \end{aligned}\right\} \quad \cdots |4|$$

se puede escribir como

$$y(t) = \Phi(t)\,\Phi(t_0)^{-1}\,y_0 \qquad \cdots |5|$$

donde $\Phi(t)$ es cualquier matriz fundamental. Aquí $\Psi(t) := \Phi(t)\,\Phi(t_0)^{-1}$ es la matriz fundamental principal en $t = t_0$.

Ejemplos:

(A) Sea el sistema

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= -x \end{aligned} \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad t \in \mathbb{R}$$

La matriz

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

es una matriz fundamental (principal en $t=0$).

Aquí $W(t) = \det \Phi(t) = \cos^2 t + \sin^2 t \equiv 1$

La solución con cualquier condición inicial $(x(t_0), y(t_0)) = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ es

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \Phi(t)\,\Phi(t_0)^{-1} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

(B) Sea el sistema

$$\begin{aligned} x' &= 2x + y \\ y' &= 3x + 4y \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = A(t) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}}_{\equiv A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$A(t) \equiv A \quad \text{constante}$$

$$\operatorname{tr} A = 6 \quad \Rightarrow \quad W(t) = \underbrace{W(0)}\, e^{6t}$$

Una colección fundamental es :

$$\phi_1(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ -e^t \end{pmatrix}, \qquad \phi_2(t) = \begin{pmatrix} e^{5t} \\ 3e^{5t} \end{pmatrix}$$

En efecto, $\phi_1' = \begin{pmatrix} e^t \\ -e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t \\ -e^t \end{pmatrix}$

$$\phi_2' = \begin{pmatrix} 5e^{5t} \\ 15e^{5t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{5t} \\ 3e^{5t} \end{pmatrix}$$

Una matriz fundamental es

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{t} & e^{5t} \\ -e^{t} & 3e^{5t} \end{pmatrix}$$

$$\Phi(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \underbrace{\det \Phi(0)}_{W(0)} = 4 \neq 0$$

$$\therefore \quad W(t) = 4e^{6t}.$$

$$\Rightarrow \quad \Phi(0)^{-1} = \begin{pmatrix} 3/4 & -1/4 \\ 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

La matriz fundamental principal en $t=0$ es:

$$\Phi(t)\,\Phi(0)^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3e^{t}+e^{5t} & -e^{t}+e^{5t} \\ -3e^{t}+3e^{5t} & e^{t}+3e^{5t} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \Phi(t)\,\Phi(0)^{-1}\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix}.$$

Sistemas lineales no homogéneos

Sea el sistema:

$$y' = A(t)y + f(t) \qquad \cdots (1)$$

con $t \in J \subseteq \mathbb{R}$, $A \in C(J; \mathbb{R}^{n\times n})$, $f \in C(J; \mathbb{R}^n)$.

condición inicial:

$$y(t_0) = y_0 \qquad \cdots (2)$$

$t_0 \in J$, $y_0 \in \mathbb{R}^n$.

Sabemos que:

- $\exists!$ solución $y \in C^1(J; \mathbb{R}^n)$ de (1), (2)
- siempre $\exists$ un sistema fundamental

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) & \cdots & y_n(t) \end{pmatrix}$$

de soluciones de $y_j' = A(t)\, y_j$.
y tal que

$$\Phi(t_0) = I.$$

Método de variación de parámetros:

$y(t) = \Phi(t) y_0$
$\Phi(t_0) = I$

consideramos que la solución de (1) y (2) es de la forma

$$y(t) = \Phi(t) c(t)$$

con $c(t) \in C^1(J; \mathbb{R}^n)$, $c(t) = \begin{pmatrix} c_1(t) \\ \vdots \\ c_n(t) \end{pmatrix}$

__Teorema__ (fórmula de variación de parámetros)

La única solución de (1), (2) está dada por:

$$y(t) = \underbrace{\Phi(t)\,y_0}_{\substack{\text{sol. homogénea}\\ \text{gral.}}} + \underbrace{\int_{t_0}^{t} \Phi(t)\,\Phi(s)^{-1} f(s)\,ds}_{\substack{\text{sol. part.}\\ \text{de la \underline{no} homogénea.}}} \quad \cdots (3)$$

donde $\Phi(t)$ - matriz fundamental de $y' = A(t)y$ con $\Phi(t_0) = I$.

__Demostración__ Suponiendo $y(t) = \Phi(t)C(t)$

$$\Rightarrow \quad y' = \Phi' C + \Phi C'$$

$$= A(t)\Phi C + \Phi C'$$

$$= A(t)\,y + f(t)$$

ssi $\quad C' = \Phi(t)^{-1} f(t) \quad \forall\, t \in J.$

$$\Rightarrow \quad C(t) = \int_{t_0}^{t} \Phi(s)^{-1} f(s)\,ds$$

$$\therefore \quad y(t) = \Phi(t)\,y_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t)\,\Phi(s)^{-1} f(s)\,ds$$

$\square$