Lección 3.9 : Transformada de Laplace. Propiedades básicas.

Lema 4 Sea $f:[0,\infty)\longrightarrow \mathbb{R}$ de orden exponencial y continua. Mas aún vamos a suponer que f' existe y que es continua por pedazos con un número finito de discontinuidades en $[0,\infty)$. Entonces $\mathcal{L}(f')(s)$ existe $\forall \operatorname{Re} s > a_0$ y

$$(\mathcal{L}f')(s) = s(\mathcal{L}f)(s) - f(0) \quad \cdots (1)$$

Demostración: Sean $0 \leq t_1 < \cdots < t_N$, $N\in\mathbb{N}$, los puntos de discontinuidad de f'. Entonces $\forall R > t_N$ tenemos

$$\int_0^R e^{-st} f'(t)\,dt \underset{\substack{t_0:=0 \\ t_{N+1}:=R>t_N}}{=} \sum_{j=0}^{N} \int_{t_j}^{t_{j+1}} e^{-st} f'(t)\,dt$$

$$= \sum_{j=0}^{N} \left\{ \left[e^{-st} f(t)\right]\Big|_{t=t_j}^{t=t_{j+1}} + s\underbrace{\int_{t_j}^{t_{j+1}} e^{-st} f(t)\,dt}_{\exists\ \forall \operatorname{Re} s > a_0} \right\}$$

$$= e^{-sR} f(R) - f(0) + s\int_0^R e^{-st} f(t)\,dt$$

Pero $$|e^{-sR} f(R)| \leq e^{-R(\operatorname{Re} s)} |f(R)|$$
$$\underset{f \text{ orden exp.}}{\leq} e^{-R(\operatorname{Re} s - a_0)} \xrightarrow[\text{si } R\to\infty,\ \text{si } \operatorname{Re} s > a_0]{} 0$$

Tomando el límite cuando $R \to \infty$ obtenemos (1).

$\square$

Corolario: Si f, f', f'' satisfacen las mismas hipótesis entonces

$$(\mathcal{L}f'')(s) = s(\mathcal{L}f')(s) - f'(0)$$
$$= s^2(\mathcal{L}f)(s) - sf(0) - f'(0) \quad \cdots (2)$$

A partir de este momento, $(\mathcal{L}f)(s)$ $\exists$ para $s \in \mathbb{R}$, con $s > \alpha_0$.

Ejemplos:

(A) Sea $f(t) \equiv 1$, $\forall\, t \geq 0$.
(Claramente, es de orden exp.).

Entonces,

$$\mathcal{L}(1)(s) = \int_0^\infty e^{-st}\, dt$$
$$= \lim_{R\to\infty} \left(-\frac{1}{s} e^{-st}\right)\Big|_{t=0}^{t=R}$$
$$= \frac{1}{s} \quad \text{si } s > 0.$$

La abcisa de convergencia es $\alpha_0 = 0$.

(B) $f(t) = e^{at}$, $t \geqslant 0$, $a \in \mathbb{R}$ constante

Es de orden exp. Entonces,

$$\mathcal{L}(e^{at})(s) = \int_0^\infty e^{-st} e^{at} \, dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-(s-a)t} \, dt, \qquad s > a$$

$$= \frac{1}{s-a}, \qquad s > a.$$

$\alpha_0 \equiv a \in \mathbb{R}$ abcisa de convergencia.

(C) $f(t) = \sin \omega t$, $t \geqslant 0$, $\omega \in \mathbb{R}$.

Claramente $|\sin \omega t| \leq K e^{at}$
con $K = 1$
$a = 0$.

Suponemos $\omega \neq 0$ (si $\omega = 0$, $f(t) \equiv 0$.)

$$\mathcal{L}(\sin \omega t)(s) = \int_0^\infty e^{-st} \sin \omega t \, dt$$

$\exists$ $\forall s > 0$. Integramos por partes

$$\int_0^\infty e^{-st} \sin \omega t \, dt = \left(-\frac{1}{\omega} e^{-st} \cos \omega t \right) \Bigg|_{t=0}^{t=\infty}$$

$$- \int_0^\infty \frac{s}{\omega} e^{-st} \cos \omega t \, dt$$

$$= \frac{1}{\omega} - \frac{s}{\omega}\left[\left(\frac{e^{-st}\sin \omega t}{\omega}\right)\right]\Bigg|_{t=0}^{t=\infty}$$

Re $s>0$

$$+ \frac{s^2}{\omega^2}\int_0^\infty e^{-st} \sin \omega t \; dt$$

$$= \frac{1}{\omega} - \frac{s^2}{\omega^2}\int_0^\infty e^{-st}\sin \omega t \; dt$$

$$\Rightarrow \left(1+\frac{s^2}{\omega^2}\right)\mathcal{L}(\sin \omega t)(s) = \frac{1}{\omega}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}(\sin \omega t)(s) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}, \quad s>0.$$

<u>Lema 5</u> (propiedades de $\mathcal{L}$)

(a) Linealidad: $\mathcal{L}(\alpha f_1 + \beta f_2) = \alpha \mathcal{L}(f_1) + \beta \mathcal{L}(f_2)$.

(b) Transformada de la derivada: f orden exp., continua, con f' continua por pedazos:

$$(\mathcal{L}f')(s) = s(\mathcal{L}f)(s) - f(0)$$

(c) Transformada de la n-ésima derivada: f de clase C^n por pedazos y de orden exp., $n \in \mathbb{N}$, :

$$(\mathcal{L}f^{(n)})(s) = s^n(\mathcal{L}f)(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) + \dots$$
$$+ \dots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0).$$

(d) Primera traslación : $\forall a \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{L}(e^{at}f(t))(s) = (\mathcal{L}f)(s-a)$$

(e) Segunda traslación : si

$$g(t) = \begin{cases} f(t-a), & t > a \\ 0, & t < a \end{cases}$$

entonces $$(\mathcal{L}g)(s) = e^{-as}(\mathcal{L}f)(s).$$

(f) Cambio de escala : si $a > 0$ y $f_a(t) := f(at)$ entonces

$$(\mathcal{L}f_a)(s) = \frac{1}{a}(\mathcal{L}f)\left(\frac{s}{a}\right)$$

(g) Transformada de una primitiva :

si
$$g(t) = \int_0^t f(\xi)\, d\xi$$

entonces
$$(\mathcal{L}g)(s) = \frac{1}{s}(\mathcal{L}f)(s).$$

(h) Multiplicación por un monomio :

$\forall n \in \mathbb{N}$
$$\mathcal{L}(t^n f(t))(s) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}(\mathcal{L}f)(s)$$

(i) Si además $\lim_{t\to 0^+} \frac{f(t)}{t}$ existe entonces

$$\mathcal{L}\left(\frac{1}{t}f(t)\right)(s) = \int_s^\infty (\mathcal{L}f)(y)\, dy$$

<u>Demostración</u>:

(a), (b) ya se probaron.

(c) Ya se demostró para $n=1$ (b) y $n=2$ (corolario). El caso general se sigue por inducción (ejercicio).

(d) $$\mathcal{L}(e^{at}f(t))(s) = \int_0^\infty e^{-st}e^{at}f(t)\, dt$$
$$= \int_0^\infty e^{-(s-a)t}f(t)\, dt$$
$$= (\mathcal{L}f)(s-a)$$

(e) Por definición de g:

$$(\mathcal{L}g)(s) = \int_a^\infty e^{-st}f(t-a)\, dt$$
$$= \int_0^\infty e^{-s(\xi+a)}f(\xi)\, d\xi$$

$\xi = t-a$

$$= e^{-as}\int_0^\infty e^{-s\xi}f(\xi)\, d\xi$$
$$= e^{-as}(\mathcal{L}f)(s).$$

(f) $$(\mathcal{L}f_a)(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(at)\, dt$$

$\xi = at$

$$= \frac{1}{a}\int_0^\infty e^{-s\xi/a} f(\xi)\, d\xi$$

$$= \frac{1}{a}(\mathcal{L}f)\left(\frac{s}{a}\right).$$

(g) Integramos por partes:

$$(\mathcal{L}g)(s) = \left(\mathcal{L}\int_0^t f(\xi)\, d\xi\right)(s)$$

$$= \int_0^\infty e^{-st}\int_0^t f(\xi)\, d\xi\; dt$$

$$= \int_0^\infty \frac{d}{dt}\left[-\frac{1}{s}e^{-st}\right]\int_0^t f(\xi)\, d\xi\; dt$$

$$= \underbrace{\left[-\frac{1}{s}e^{-st}\int_0^t f(\xi)\, d\xi\right]_{t=0}^{t=\infty}}_{\to 0} + \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$$

Aquí es necesario pedir que $s > 0$ y

$$\lim_{t\to\infty} e^{-st}\int_0^t f(\xi)\, d\xi = 0$$

$$\Rightarrow \quad (\mathcal{L}g)(s) = \frac{1}{s}(\mathcal{L}f)(s).$$

(h) Por inducción sobre $n \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{L}(t f(t))(s) = -\frac{d}{ds}(\mathcal{L}f)(s)$$

Suponiendo que $s>0$ y $t f(t) e^{-st}$ es integrable en $t\in(0,\infty)$ por el lema 2 (clase pasada):

$$\frac{d}{ds}(\mathcal{L}f)(s) = -\int_0^\infty t e^{-st} f(t)\, dt$$

$$= -\mathcal{L}(t f(t))(s).$$

$\Rightarrow$ fórmula para $n=1$.

Suponiendo fórmula para $n\in\mathbb{N}$:

$$\mathcal{L}(t^{n+1} f(t))(s) = \mathcal{L}(t\cdot t^n f(t))(s)$$

$$\underset{n=1}{=} -\frac{d}{ds}\mathcal{L}(t^n f(t))(s)$$

$$\underset{\text{hipótesis de inducción}}{=} (-1)(-1)^n \frac{d}{ds}\left[\frac{d^n}{ds^n}(\mathcal{L}f)(s)\right]$$

$$= (-1)^{n+1}\frac{d^{n+1}}{ds^{n+1}}(\mathcal{L}f)(s)$$

$\therefore$ fórmula para $n+1$.

(i) Usando (h) con $n=1$

$$\mathcal{L}(t f(t))(s) = -\frac{d}{ds}(\mathcal{L}f)(s)$$

Por lo tanto,

$$\frac{d}{ds}\left(\mathcal{L}\left(\frac{1}{t}f(t)\right)(s)\right) = -\mathcal{L}\left(t\cdot\frac{1}{t}f(t)\right)(s)$$
$$= -(\mathcal{L}f)(s)$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\left(\frac{1}{t}f(t)\right)(s) = -\int_{s_0}^{s}(\mathcal{L}f)(y)\,dy + C$$

para cierto $s_0 > a_0$ y cierta constante C.

Tomando $s = s_0$:

$$C = \mathcal{L}\left(\frac{1}{t}f(t)\right)(s_0) = \int_0^\infty e^{-s_0 t}\frac{1}{t}f(t)\,dt$$

Suponemos que $\frac{1}{t}f(t)$ es de orden exponencial y que $\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t}f(t)$ $\exists$.

Por lo tanto,

$$\int_0^\infty e^{-s_0 t}\frac{1}{t}f(t)\,dt = \int_0^R e^{-s_0 t}\frac{1}{t}f(t)\,dt + \int_R^\infty e^{-s_0 t}\underbrace{\frac{1}{t}f(t)}\,dt$$
$$\leq \int_0^R e^{-s_0 t}\underbrace{\frac{1}{t}f(t)}\,dt + K\int_R^\infty e^{-s_0 t}e^{at}\,dt$$

$\longrightarrow 0$ si $S_0 \to \infty$

ya que $\left|\frac{1}{t} f(t)\right| \leq C$ para $t \sim 0^+$,

y $\left| \int_R^\infty e^{-(S_0-a)t} \, dt \right| \leq \int_R^\infty e^{-(S_0-a)t} \, dt$

$$= -\frac{1}{(S_0-a)} \left(1 - e^{-(S_0-a)R}\right)$$

$\longrightarrow 0$ si $S_0 \to \infty$

Podemos tomar $C=0$, y $S_0 \longrightarrow \infty$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{L}\left(\frac{1}{t} f(t)\right)(s) = \int_s^\infty (\mathcal{L}f)(y) \, dy$$

$\square$