Lección 3.8 : Transformada de Laplace. Definición y propiedades básicas.

Modelo básico de vibración mecánica:

$$my'' + cy' + ky = F(t) \quad \cdots \quad (1)$$

con $m, k, c > 0$ constantes,

$F = F(t)$ conocida (forzamiento)

Aquí:
- $c > 0$ ($\exists$ amortiguamiento)
- $F(t) = F_0 \cos \omega t$ ($F_0, \omega > 0$ constantes)

Si $c > 0$ entonces la solución de (1) con $F(t) = F_0 \cos \omega t$ es de la forma

$$y(t) = \underbrace{\varphi(t)}_{\substack{\text{solución particular,} \\ \text{oscilante (llamada} \\ \text{"estacionaria")}}} + \underbrace{\eta(t)}_{\substack{\text{solución general} \\ \text{de la homogénea} \\ \text{casos (i), (ii), (iii)} \\ \text{"transiente"}}}$$

$\eta(t) \to 0$ si $t \to \infty$ (caso $c > 0$)

La solución particular es:

$$\varphi(t) = \frac{F_0}{\sqrt{(k-m\omega^2)^2 + c^2\omega^2}} \cos(\omega t - \delta) \quad \cdots (2)$$

con $\delta = \operatorname{Arc\,tan}\left(\frac{c\omega}{k-m\omega^2}\right)$

De (2) notamos:

- φ oscila con la misma frecuencia del forzamiento, $\omega > 0$.
- hay un desfasamiento de magnitud δ.
- la amplitud de la vibración está multiplicada por el factor

$$G(\omega) := \frac{1}{\sqrt{(k-m\omega^2)^2 + c^2\omega^2}} = \frac{(1/m)}{\sqrt{\left(\frac{k}{m}-\omega^2\right)^2 + \left(\frac{c}{m}\right)^2\omega^2}} \quad \cdots (3)$$

La curva $\omega \longmapsto G(\omega)$, $\omega > 0$, es llamada la <u>curva de resonancia</u>.

De (3) notamos que:

- $G(0) = \dfrac{1}{k} > 0$
- $G(\omega) \to 0$ si $\omega \to \infty$.

Derivando:

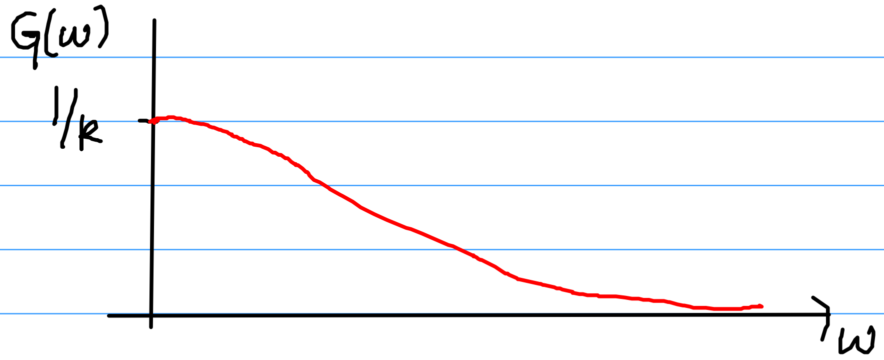
$$G'(\omega) = -\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{k}{m}-\omega^2\right)^2 + \left(\frac{c}{m}\right)^2\omega^2\right]^{-3/2} \times$$

$$\times\left(2\left(\frac{k}{m}-\omega^2\right)(-2\omega) + 2\left(\frac{c}{m}\right)^2\omega\right)$$

$$= \frac{\dfrac{2\omega}{m}\left[\left(\dfrac{k}{m}-\dfrac{c^2}{2m^2}\right)-\omega^2\right]}{\left[\left(\dfrac{k}{m}-\omega^2\right)^2+\left(\dfrac{c}{m}\right)^2\omega^2\right]^{3/2}}$$

$G'(\omega) = 0$ ssi
- $\omega = 0$, ó
- $\omega = \omega_1 := \left(\dfrac{k}{m} - \dfrac{c^2}{2m^2}\right)^{1/2}$

Si $\dfrac{k}{m} - \dfrac{c^2}{2m^2} < 0$ $\left(\Leftrightarrow \quad c^2 > 2mk\right)$
entonces $\omega_1 \in i\mathbb{R}$ y $G'(\omega) = 0$ en $\omega \in [0,\infty)$ sólo en $\omega = 0$.



El caso interesante es cuando

$$0 < c^2 < 2mk \qquad \cdots \quad (4)$$

En este caso

$$\omega_1 := \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{2m^2}} > 0$$

es un cero de G'.

$G'(\omega) > 0$ si $\omega \in (0, \omega_1)$

$G'(\omega) < 0$ si $\omega \in (\omega_1, \infty)$

$\Rightarrow$ G tiene un máximo en $\omega = \omega_1$:

$$G(\omega_1) = \frac{1}{c\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{4m^2}}}$$

$\omega = \omega_1$ es la frecuencia de resonancia del sistema.

Si el sistema tiene un forzamiento con frecuencia $\omega \equiv \omega_1 > 0$ decimos que el sistema está en resonancia.

Transformada de Laplace

Herramienta útil en el estudio de ecuaciones diferenciales.

Definición Sea $f = f(t)$, $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, continua por pedazos. Se dice que f es de orden exponencial si existen constantes $K>0$ y $a \in \mathbb{R}$ tales que

$$|f(t)| \leq K e^{at}, \qquad \forall t \geq 0 \qquad \ldots (1)$$

Definición (transformada de Laplace)

Sea $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ es de orden exponencial con constantes $K>0$ y $a \in \mathbb{R}$. Entonces para todo $s \in \mathbb{C}$ tal que $\operatorname{Re} s > a$ se define la transformada de Laplace de f mediante

$$\left.\begin{aligned} (\mathcal{L}f)(s) &:= \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt \\ s \in \mathbb{C},\ &\operatorname{Re} s > a \end{aligned}\right\} \ldots (2)$$

observación: (2) está bien definida.
En efecto, sea $R \gg 1$ (grande); entonces

$$\left| \int_0^R e^{-st} f(t)\, dt \right| \leq \int_0^R e^{-(\operatorname{Re} s)t} |f(t)|\, dt$$

f de orden exp.

$$\leq K \int_0^R e^{-(\operatorname{Re} s - a)t}\, dt$$

$$= \frac{K}{(\operatorname{Re} s - a)} \left[1 - e^{-(\operatorname{Re} s - a)R} \right]$$

Dado que $\operatorname{Re} s > a$, tomando el límite cuando $R \to \infty$

$$\left| \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt \right| \leq \frac{K}{\operatorname{Re} s - a}$$

$\therefore$ la integral existe.

Notamos también que si (2) existe para $s \in \mathbb{C}$ entonces también exise $\forall\, \tilde{s} \in \mathbb{C}$ con $\operatorname{Re} \tilde{s} \geq \operatorname{Re} s$, uniforme-mente con respecto a $\hat{s}$ ya que

$$\left| e^{-\tilde{s}t} f(t) \right| \leq e^{-(\operatorname{Re} \tilde{s})t} |f(t)|$$

$$\leq e^{-(\operatorname{Re} s)t} |f(t)|$$

Lema 1 Sea f de orden exponencial con constantes $K > 0$, $a \in \mathbb{R}$. Entonces existe $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ llamado abcisa de convergencia que satisface :

(i) $a_0 \leq a$

(ii) la integral en (2) no existe si $\operatorname{Re} s < a_0$.

(iii) la integral en (2) existe siempre que $\operatorname{Re} s > a_0$.

<u>Demostración</u>: Sabemos que si $\operatorname{Re} s > a$ entonces la integral en (2) exista. Definimos

$$A := \left\{ a \in \mathbb{R} : \text{la integral } \int_0^\infty e^{-at} |f(t)| dt \text{ existe} \right\}$$

Por la observación anterior $\forall \varepsilon > 0$ la integral existe si $\operatorname{Re} s \geq a + \varepsilon$. Por lo tanto A es no vacío. Definimos

$$a_0 := \inf_{\mathbb{R}} A.$$

Claramente, por definición de ínfimo la integral no existe si $\operatorname{Re} s < a_0$. Además, existe siempre que $\operatorname{Re} s > a_0$ ya que $a + \varepsilon \in A$, $\forall \varepsilon > 0$. Tomando el límite cuando $\varepsilon \to 0^+$ obtenemos $a_0 \leq a$

$\square$

Lema 2 $(\mathcal{L}f)(s)$ es analítica en el conjunto $\{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s > a_0\} \subset \mathbb{C}$ y además

$$\frac{d}{ds}(\mathcal{L}f)(s) = -\int_0^\infty t e^{-st} f(t)\, dt \qquad \cdots (3)$$

Dem. Ver Marsden, "variable compleja".

Lema 3 La transformada de Laplace es lineal, es decir, si f_1, f_2 de orden exponencial con constantes $K_j > 0$, $a_j \in \mathbb{R}$, $j = 1,2$, respectivamente, entonces para cualesquiera $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ se tiene que

$$\mathcal{L}(\alpha f_1 + \beta f_2)(s) = \alpha(\mathcal{L}f_1)(s) + \beta(\mathcal{L}f_2)(s) \qquad \cdots (4)$$

$\forall\, s \in \mathbb{C}$ con $\operatorname{Re} s > \max\{a_1, a_2\}$.

Demostración: Sea $s \in \mathbb{C}$ tal que $\operatorname{Re} s > a_1$ y $\operatorname{Re} s > a_2$, tenemos entonces que,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\alpha f_1 + \beta f_2)(s) &= \int_0^\infty (\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)) e^{-st}\, dt \\
&= \alpha \int_0^\infty e^{-st} f_1(t)\, dt + \beta \int_0^\infty e^{-st} f_2(t)\, dt \\
&= \alpha(\mathcal{L}f_1)(s) + \beta(\mathcal{L}f_2)(s)
\end{aligned}$$

$\square$