Lección 2.7 : Casos especiales (continuación). Aplicaciones: la braquistócrona.

Ejemplos (continuación)

2. Sea la ecuación

$$y = 2ty' - 3(y')^2 \quad = t f(y') + g(y')$$

Ec. de primer orden tipo d'Alembert con

$$f(p) = 2p, \qquad g(p) = -3p^2$$

$f(p) \not\equiv p$. único punto fijo $p_* = 0$.

Solución singular $y(t) \equiv 0$.

Sustituyendo en

$$(f(p) - p)\frac{dt}{dp} + t f'(p) = -g'(p)$$

$$\Rightarrow \quad p\frac{dt}{dp} + 2t = +6p$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dt}{dp} + \underbrace{\frac{2}{p}}_{a(p)} t = \underbrace{6}_{b(p)}$$

ec. lineal no homogénea.

$$\exp\left(\int^p a(p)\,dp\right) = p^2$$

$$\exp\left(-\int^p a(p)\,dp\right) = \frac{1}{p^2}$$

Solución de la homogénea $\quad t = \dfrac{C}{p^2}$

Variación de parámetros

$$\int^p \exp\left(\int^p a\right) b \, dp = \int^p 6p^2 \, dp$$

$$= 2p^3$$

$$\Rightarrow \quad t(p) = \frac{C}{p^2} + 2p$$

$$\Rightarrow \quad y(p) = 2tp - 3p^2$$

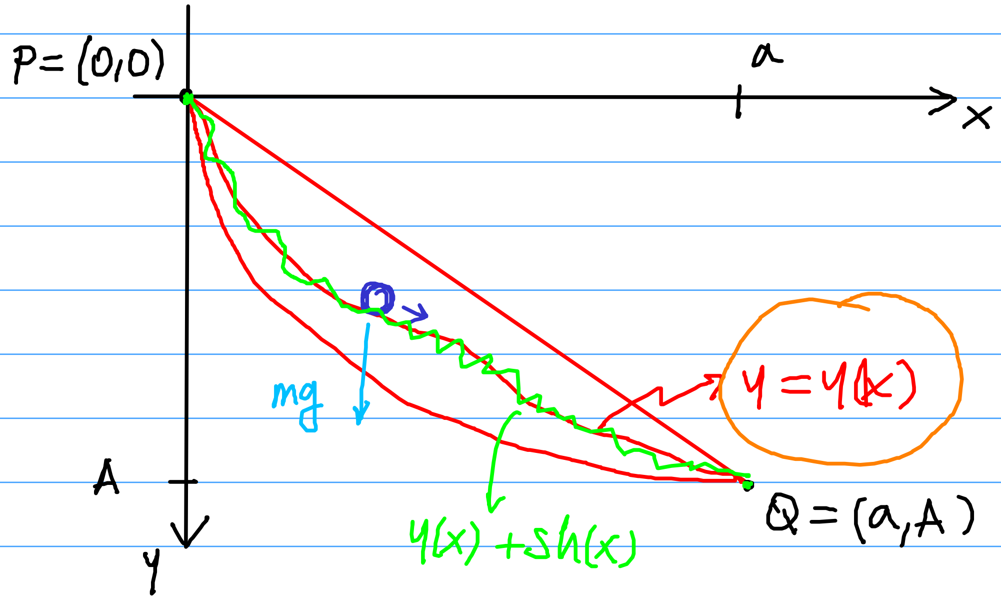
$$= 2p\left(\frac{C}{p^2} + 2p\right) - 3p^2$$

$$= p^2 + \frac{2C}{p}$$

Solución en forma paramétrica.

Aplicación: problema de la braquistócrona.

Bernoulli (~ 1696): encontrar la curva sobre la cual se desliza una partícula de masa $m=1$, sin fricción bajo la acción de la gravedad, de manera que el tiempo sea mínimo.



Suponemos que la partícula se desplaza sobre la curva $y = y(x)$, $x \in [0,a]$ con

$$y(0) = 0, \quad y(a) = A.$$

ds = elemento de longitud de arco sobre la curva

$$v = \frac{ds}{dt} \quad \text{velocidad}$$

ℓ – longitud de la curva entre P y Q

$$T = \int_0^{\ell} \frac{ds}{v} \quad \cdots \quad (1)$$

Tenemos,

$$ds = \sqrt{1 + y'(x)^2}\, dx$$

$$\ell = \int_0^{a} \sqrt{1 + y'(x)^2}\, dx$$

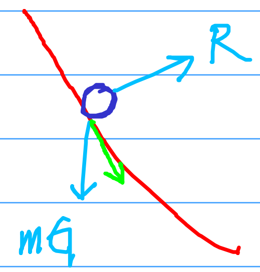
Aplicamos 2a ley de Newton :

$$X(t) = (x(t), \tilde{y}(t)), \qquad \tilde{y} = y(x(t))$$

Fuerza de gravedad : $G = (0, g)$

$g > 0$

$$(2) \cdots \quad \underbrace{m\ddot{X}}_{\text{masa x aceleración}} = \underbrace{mG}_{\text{fuerza de gravedad}} + \underbrace{R}_{\text{fuerza de reacción}} \qquad \dot{} = \frac{d}{dt}$$



R es normal a la tangente $\dot{X}$

$$\Rightarrow \quad R \cdot \dot{X} = 0$$

(m=1) tomando el producto punto de (2) con X :

$$\underbrace{\dot{X} \cdot \ddot{X}} = \dot{X} \cdot G + \underbrace{\dot{X} \cdot R}_{=0}$$

$$\Rightarrow \quad \dot{x}\ddot{x} + \dot{\tilde{y}}\ddot{\tilde{y}} = g\dot{\tilde{y}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\dot{x}^2 + \dot{\tilde{y}}^2 - 2g\tilde{y}\right) = 0$$

Integrando :

$$2g\tilde{y}(t) + C = \dot{x}^2 + \dot{\tilde{y}}^2$$

con C constante. La partícula parte del reposo

$$\dot{x}(0)^2 + \dot{\tilde{y}}(0)^2 = 0$$

$$y \quad \tilde{y}(0) = y(x(0)) = 0$$

$\Rightarrow$ $C=0$ y obtenemos

$$2g\,\tilde{y}(t) = \dot{x}(t)^2 + \dot{\tilde{y}}(t)^2$$

$$= v^2 \qquad \cdots (5)$$

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1+y'(x)^2}$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dx}\frac{dx}{dt}$$

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = (1+y'(x)^2)\,\dot{x}(t)^2$$

$$= \dot{x}(t)^2 + \left(\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}\right)^2$$

$$= \dot{x}(t)^2 + \dot{\tilde{y}}(t)^2$$

$$\Rightarrow \quad v = +\sqrt{2g\tilde{y}(t)} = \sqrt{2g\,y(x)}$$

$$y>0$$

Así, el tiempo de llegada de la partícula al punto (a, A) es:

$$(4) \ldots \quad \underbrace{T[y]}_{\text{funcional}} = \int_0^a \frac{\sqrt{1+y'(x)^2}}{\sqrt{2g\,y(x)}}\, dx$$

con $y \in \underline{C^1([0,a])}$, $y(0)=0$, $y(a)=A$.

Minimizar el funcional T que depende de la función $y=y(x)$.

El valor de T depende de la elección de la función $y=y(x)$ con condiciones:

- $y(0)=0$, $y(a)=A$
- $y \in C^1([0,a])$

Notamos que la integral es impropia si $y(x_*)=0$ en algún punto $x_* \in [0,a]$ o bien, si $|y'(x)| \to \infty$ en $(0,a)$.

Nota: en espacios vectoriales V, de $\dim V < \infty$ todas las normas son equivalentes, $v \in V$

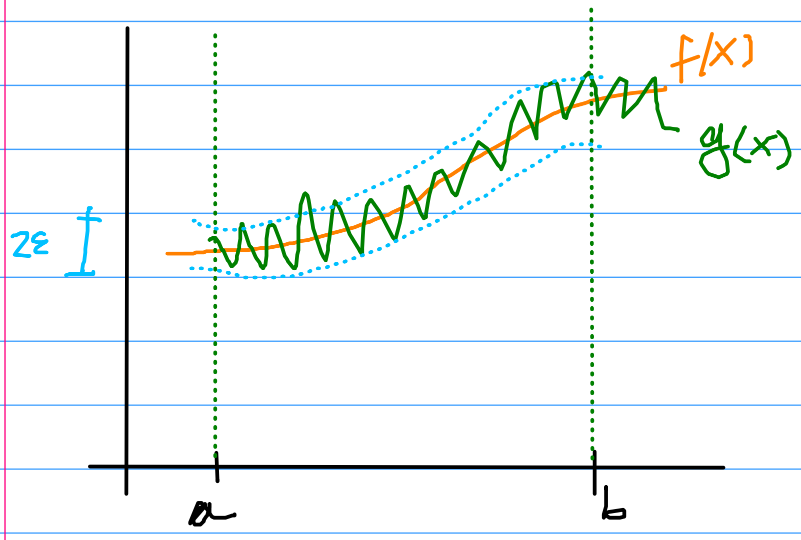
$\|v\|$, $|||v|||$ normas

$$c\|v\| \leq |||v||| \leq \frac{1}{c}\|v\|$$

Prototipo: $V = \mathbb{R}^n$, $\dim V = n$.

En espacios de dim = ∞ esto no es cierto.

Ejemplo : $f, g \in C^1[a,b]$



f, g son vecinas en la norma de $C^0([a,b])$:

$$\|f-g\|_0 := \max_{x \in [a,b]} |f(x)-g(x)| < \varepsilon$$

Pero no lo son en la norma de $C^1([a,b])$:

$$\|f-g\|_1 := \left(\int_a^b (f-g)^2 + (\underbrace{f'-g'}_{})^2 \, dx \right)^{1/2}$$

Idea : tomaremos "variaciones" de la función $y = y(x)$ de la forma

$$y(x) + s h(x) \quad \text{variación}$$

con $h \in$ espacio adecuado, $s \in \mathbb{R}$.

Tomaremos el límite:

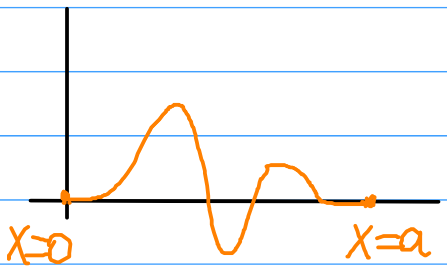
$$\lim_{s\to 0^+} \frac{T[y+sh]-T[y]}{s}$$

derivada de Gâteaux

Igualando a cero obtenemos una condición necesaria para el mínimo.

Variaciones en el espacio:

$$h \in \underbrace{C_0^\infty([0,a])} = \left\{ h \in C^\infty([0,a]) : \begin{array}{l} h(0)=h(a)=0 \\ \frac{d^m h}{dx^m}(0)=\frac{d^m h}{dx^m}(a)=0 \\ \forall\, m=1,2,\dots \end{array}\right\}$$



De este modo:

$$\underbrace{y(0)}_{=0} + s\underbrace{h(0)}_{=0} = 0$$

$$\underbrace{y(a)}_{=A} + s\underbrace{h(a)}_{=0} = A$$

Obtenemos:

$$T[y+sh] = \int_0^a \frac{\sqrt{1+(sh'(x)+y'(x))^2}}{\sqrt{2g(sh(x)+y(x))}}\,dx$$

$$T[y] = \int_a^b F(y(x), y'(x))\,dx$$