Lección 2.4 : Casos especiales: Bernoulli, sustitución y similaridad.

I. Ecuación de Bernoulli.

Son ecuaciones del tipo

$$y' + a(t)\, y = b(t)\, y^{\alpha} \qquad \cdots (1)$$

con $t \in I \subset \mathbb{R}$, $a, b \in C(I; \mathbb{R})$, continuas, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$.

Hemos visto que la transformación

$$u := y^{1-\alpha} \qquad \cdots (2)$$

convierte (1) en una ecuación <u>lineal</u> no homogénea para u,

$$u' + \underbrace{(1-\alpha)\, a(t)}_{\tilde{a}(t)}\, u = \underbrace{(1-\alpha)\, b(t)}_{\tilde{b}(t)} \qquad \cdots (3)$$

que se puede resolver por variación de parámetros.

Ejemplos (Bernoulli) :

(a) Sea la ecuación

$$y' - y = t y^2 \qquad \cdots (4)$$

Aquí $a(t) = -1$, $b(t) = t$, $a, b \in C^\infty(\mathbb{R})$
y $\alpha = 2$. Hacemos la transformación

$$u = y^{1-\alpha} = \frac{1}{y}$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{1}{u}, \quad y' = \frac{-u'}{u^2}.$$

Sustituyendo en (4):

$$-\frac{u'}{u^2} - \frac{1}{u} = \frac{t}{u^2}$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{u' + u = -t}_{\text{ecuación lineal}} \qquad \cdots (5)$$

Resolvemos por variación de parámetros:

- solución general de la homogénea
  $u' + u = 0$:
  $$u_h(t) = Ce^{-t}$$
- solución particular de la no homogénea.
  Ansatz del lado derecho:

$$u_p(t) = C_1 t + C_2 \quad \Rightarrow \quad u_p' = C_1$$

$$u_p' + u_p = C_1 t + (C_1 + C_2) = -t$$

$$\Rightarrow \quad C_1 = -1, \; C_2 = 1$$

$\therefore \quad u_p(t) = 1-t.$

La solución general de (S) es :

$$u(t) = u_h(t) + u_p(t)$$
$$= Ce^{-t} + 1 - t.$$

La solución de (4) es

$$y(t) = \frac{1}{Ce^{-t} + 1 - t}$$

Ejercicio : comprobar que y es solución de (4) $\forall C \in \mathbb{R}$ constante.
¿ Es una familia completa de soluciones ?

(b) Sea la ecuación no lineal

$$2y' - \frac{y}{t} + y^3 \cos t = 0 \quad \cdots (6)$$

$$\Leftrightarrow \quad y' - \underbrace{\frac{1}{2t}} y = -\frac{y^3}{2} \underbrace{\cos t}$$

Tipo Bernoulli : $a(t) = -\frac{1}{2t}$

$b(t) = -\frac{1}{2} \cos t$

$a, b \in C^\infty(I)$, $\quad I = (0,\infty)$ ó $(-\infty, 0)$.

con $\alpha = 3$

Haciendo $\quad u = y^{1-\alpha} = y^{-2}$

$$\Leftrightarrow \quad y^2 = \frac{1}{u}$$

$$\therefore \quad 2yy' = -\frac{u'}{u^2} \quad \Rightarrow \quad y' = -\frac{u'}{2u^{3/2}}$$

sustituyendo :

$$0 = y' - \frac{1}{2t}y + \frac{1}{2}y^3 \cos t$$

$$= -\frac{u'}{2u^{3/2}} - \frac{1}{2t}\cdot\frac{1}{u^{1/2}} + \frac{1}{2u^{3/2}}\cos t$$

$$\Leftrightarrow \quad u' + \frac{1}{t}u = \cos t \quad \cdots (7)$$

ec. lineal no homogenea.

Aquí $\quad \tilde{a}(t) = \frac{1}{t}$, $\quad \tilde{b}(t) = \cos t$

$$\therefore \quad e^{\int^t \tilde{a}(s)\,ds} = t$$

$$e^{-\int^t \tilde{a}(s)\,ds} = \frac{1}{t}$$

· Solución general de la homogénea

$$u_h(t) = \frac{C}{t}$$

Fórmula de variación de parámetros :

u_h

$$u(t) = \frac{1}{t}\left[C + \int^t \xi \, \tilde{b}(\xi) \, d\xi \right]$$

$$= \frac{1}{t}\left[C + \int^t \xi \cos \xi \, d\xi \right]$$

$$= \frac{1}{t}\left[C + \int^t \left(\frac{d}{d\xi}(\xi \sin \xi) - \sin \xi \right) d\xi \right]$$

$$= \frac{1}{t}\left[C + t \sin t + \cos t \right]$$

solución de (7).

La solución de (6) es :

$$y(t) = \frac{1}{\left[\frac{C}{t} + \sin t + \frac{1}{t} \cos t \right]^{1/2}}$$

$t \in (0,\infty)$
ó $t \in (-\infty, 0)$

Ejercicio : comprobar que y es solución de (6) $\forall\, C \in \mathbb{R}$ constante, en $t \in (0,\infty)$ ó $t \in (-\infty, 0)$ tal que $u \geq 0$. ¿Es completa?

II. Solución por sustitución.

Sea una ecuación de la forma

$$y' = f(at + by + c) \quad \cdots \quad (1)$$

con $a, b, c \in \mathbb{R}$ constantes, $b \neq 0$, y $f \in C(\mathbb{R})$. (1) es en general, no lineal.

Hacemos el cambio de variables

$$u(t) := at + by(t) + c \quad \cdots \quad (2)$$

Derivando,
$$u' = a + by'$$
$$= a + bf(u)$$

$$\Rightarrow \quad u' - bf(u) = a \quad \cdots \quad (3)$$

(3) es no lineal pero separable.

Ejemplo: Sea la ecuación no lineal

$$y' = (t + y + 1)^2 \quad \cdots \quad (4)$$

Aquí $a = b = c = 1$. $\quad f = f(\xi) = \xi^2$

Sea $u := t + y + 1$.

$$\Rightarrow \quad u' = 1 + y' = 1 + (t+y+1)^2 = 1 + u^2.$$

Ec. separable:

$$\frac{du}{dt} = 1+u^2 \qquad \dots (S)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{du}{1+u^2} = dt$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{Arc\,tan} u = t + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

$$\therefore \quad u(t) = \tan(t+C), \qquad t+C \neq \frac{k\pi}{2}, \; k \in \mathbb{Z}$$

obtenemos así

$$\begin{cases} y(t) = \tan(t+C) - (t+1) \\ t+C \neq \frac{k\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Ejercicio: verificar que es solución.

III. Solución por similaridad.

Consideremos ecuaciones de la forma

$$y' = f\left(\frac{y}{t}\right), \qquad t \neq 0 \qquad \dots (1)$$

donde $f \in C(\mathbb{R})$ continua.

Notamos que (1) es invariante bajo transformaciones de similaridad, es decir,

$$(t,y) \mapsto (\alpha t, \alpha y), \quad \text{con } \alpha \neq 0$$

(i) Si $y = y(t)$ es solución de (1) entonces $\forall \alpha \neq 0$,

$$\tilde{y}(t) := \frac{1}{\alpha} y(\alpha t)$$

también es solución de (1):

$$\tilde{y}'(t) = \frac{1}{\alpha} y'(\alpha t) \cdot \alpha$$

$$= f\left(\frac{y(\alpha t)}{\alpha t}\right)$$

$$= f\left(\frac{\tilde{y}(t)}{t}\right)$$

(ii) Si $y = y(t)$ es solución de (1) para $t > 0$ entonces

$$\tilde{y}(t) := -y(-t)$$

es solución de (1) para $t < 0$ (aplicar (i) con $\alpha = -1$).

(iii) Sea $u = \frac{y}{t}$, $t \neq 0$. Entonces

$$y = tu, \quad y' = u + tu'$$

$$\Rightarrow \quad f\left(\frac{y}{t}\right) = f(u) = y' = u + tu'$$

$$\Rightarrow \quad u' = \frac{f(u) - u}{t} \quad \cdots \quad (2)$$

(2) es una ecuación <u>separable</u>.

(iv) Si f tiene puntos fijos

$$f(u_*) = u_*$$

con $u_* \in \mathbb{R}$ constante, entonces

$$y(t) = t\, u_*$$

es solución de (1). $y' = u_* = f(u_*) = f\left(\frac{y}{t}\right)$.

(v) Si f <u>no</u> tiene puntos fijos en el dominio de integración entonces la solución de (1) está dada por

$$y(t) = t\, u(|t|), \qquad t \neq 0.$$

donde u es la solución de (2).

Ejemplo: sea la ecuación

$$y' = \frac{y}{t} - \sqrt{1 - \frac{y}{t}}$$

con $\quad t \neq 0, \quad \frac{y}{t} \leq 1.$

Tomamos $t>0$. $\quad (I = (0,\infty))$.

Aquí $f(u) = u - \sqrt{1-u}$

con dominio $u \in (-\infty, 1]$

La ecuación es de la forma $y' = f\left(\frac{y}{t}\right)$.

$f(u)$ tiene un único punto fijo : $u_* = 1$

$f(1) = 1$.

Así, $\quad y(t) = t \quad$ es solución particular en $t>0$.

(También lo es si $t<0$).

Hacemos la sustitución $u = \frac{y}{t}$.

$$\Rightarrow \quad u - \sqrt{1-u} = f(u) = f\left(\frac{y}{t}\right)$$
$$= y'$$
$$= tu' + u$$

$$\Rightarrow \quad u' = -\frac{1}{t}\sqrt{1-u}$$

ecuación no lineal separable.

$$-\frac{du}{\sqrt{1-u}} = \frac{dt}{t}, \qquad t>0$$

$$\Rightarrow \quad 2\sqrt{1-u} = \log t + C$$

Es decir,

$$u(t) = 1 - \frac{1}{4}(\log t + c)^2 \leq 1$$

si $t>0$.

La familia de soluciones es

$$y(t) = t - \frac{t}{4}(\log t + c)^2, \quad t>0.$$

En el caso $t<0$,

$$y(t) = t - \frac{t}{4}(\log|t| + c)^2,$$

La familia no es completa: $y(t) = t$ no pertenece a la misma.