Lección 2.1 : Ecuaciones de primer orden.

Sección 2: Ecuaciones de primer orden.

2.1 Ecuaciones lineales de primer orden homogéneas.

Definición La ecuación general lineal de primer orden tiene la forma:

$$\frac{dy}{dt} + a(t)\,y = b(t) \qquad \cdots (1)$$

donde $t \in I \subseteq \mathbb{R}$, $a, b \in C(I;\mathbb{R})$. Tenemos dos casos:

(i) $b(t) \equiv 0$: la ecuación (1) se denomina homogénea.

(ii) $b(t) \not\equiv 0$ (no idénticamente la función cero). La ecuación (1) es no homogénea.

Lema Sea $a \in C(I;\mathbb{R})$, continua. Entonces la ecuación lineal homogénea

$$\frac{dy}{dt} + a(t)\,y = 0 \qquad \cdots (2)$$

tiene una familia completa de soluciones dada por:

$$y(t) = C e^{-\int^t a(s)\,ds} \quad \dots \quad (3)$$

donde $C \in \mathbb{R}$, constante, $\int^t a(s)\,ds$ denota cualquier antiderivada de a.

Demostración: La ecuación (2) es separable:

$$\frac{dy}{y} = -a(t)\,dt$$

$$\Rightarrow \log y = -\int^t a(s)\,ds + \tilde{C}$$

$\Rightarrow$ (2).

(2) es una familia de soluciones:

$$\frac{dy}{dt} = -a(t)\,C e^{-\int^t a(s)\,ds}$$

$$= -a(t)\,y \qquad \forall c \in \mathbb{R}, \ \forall t \in I$$

Además, la ecuación (2) es de la forma

$$A(y,t) + B(y,t)\frac{dy}{dt} = 0$$

con $A(y,t) = a(t)\,y$, $B(y,t) = 1$
con factor integrante

$$\mu(t) = \exp\left(\int^t a(s)\,ds\right)$$

$\Rightarrow$ la primitiva es

$$\Phi(y,t) = y \exp\left(\int^t a(s)\,ds\right)$$

$$= C \qquad \forall\, C \in \mathbb{R}$$

Aplicando el teorema de $\exists$ local para ecuaciones exactas (sección 1), el problema de valores iniciales con

(4) ... $\quad y(t_0) = y_0 \in \mathbb{R}, \qquad t_0 \in I$

es única y se puede extender a todo el intervalo I (ya que $B(t,y) \equiv 1$)
Por lo tanto la familia es completa.

El problema (2) con (4) tiene como única solución

$$y(t) = y_0 \exp\left(-\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds\right) \quad \dots (5)$$

$\square$

Ejemplos:

(A) Sea $a \in \mathbb{R}$, constante $a \neq 0$, $I = \mathbb{R}$.

La ecuación $\quad y' + ay = 0$

tiene como familia completa

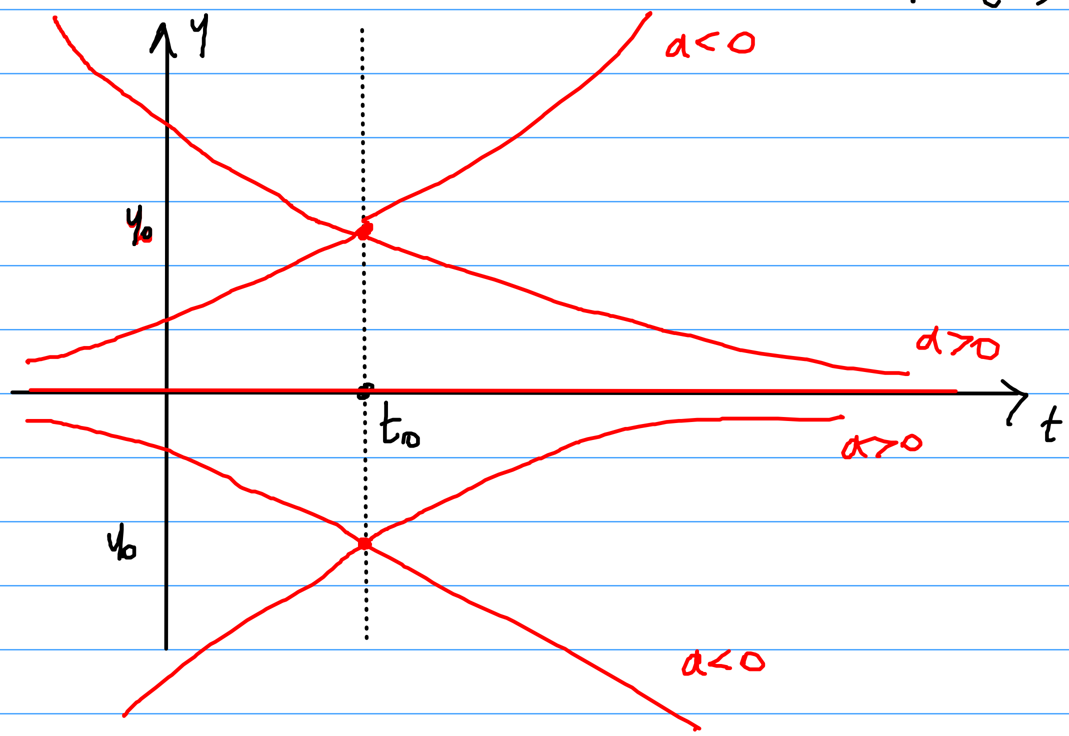
$$y(t) = Ce^{-at} \quad \text{con } C \in \mathbb{R}$$

Si $y(t_0) = y_0$ entonces la única solución es

$$y(t) = y_0 \, e^{-a(t-t_0)}$$

Así:

- Si $y_0 = 0$ entonces $y(t) \equiv 0$.
- Si $\begin{cases} y_0 \neq 0 \\ a > 0 \end{cases}$ " $y(t) \to 0$ si $t \to \infty$; $y(t) \to (\operatorname{sgn} y_0)\infty$ si $t \to -\infty$
- Si $\begin{cases} y_0 \neq 0 \\ a < 0 \end{cases}$ entonces $y(t) \to 0$ si $t \to -\infty$; $y(t) \to (\operatorname{sgn} y_0) \cdot \infty$ si $t \to +\infty$.



(B) $\quad ty' + y = 0$

$\Rightarrow \quad y' + a(t)\,y = 0$

$a(t) = \frac{1}{t}, \qquad I = (-\infty, 0)$
$\qquad\qquad\qquad\quad I = (0, \infty)$

a continua excepto en $t=0$.

Antiderivada de a : $\int^t \frac{ds}{s} = \log|t|$

Solución general :

$$y(t) = \frac{C}{|t|} \qquad \text{con } C \in \mathbb{R} \text{ constante}$$

$t \in (0,\infty)$, ó
$t \in (-\infty, 0)$

El problema de valores iniciales en $t=0$ no tiene solución ($a(t) = 1/t$ no es continua en $t=0$).

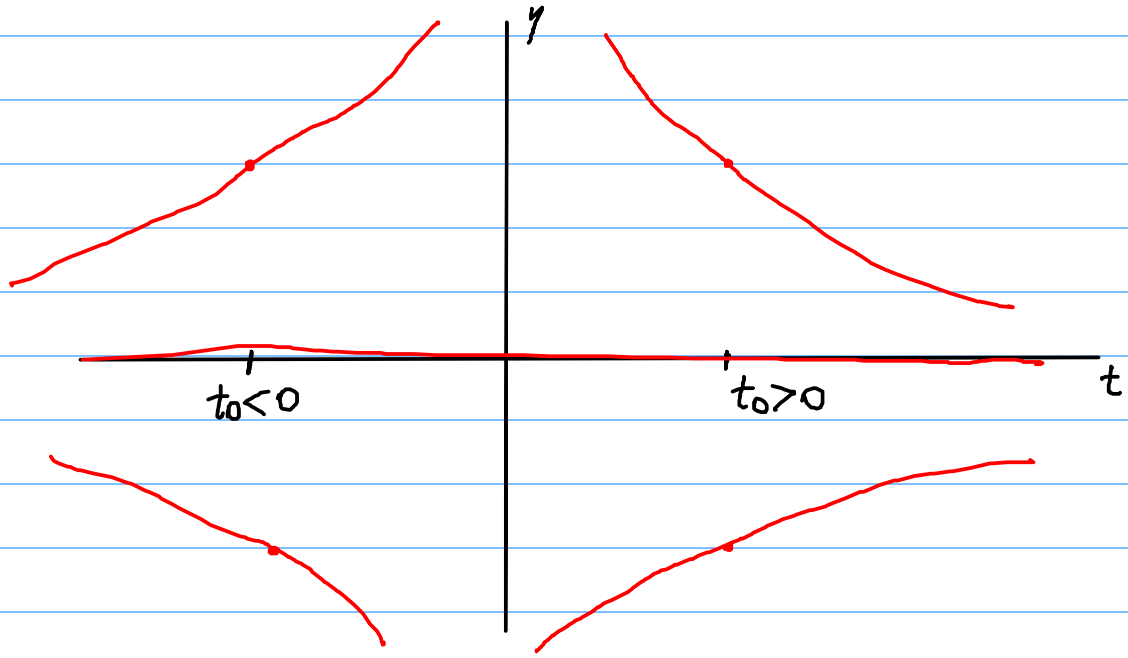
Sea $t_0 \neq 0$, con condición inicial $y(t_0) = y_0 \in \mathbb{R}$.

Si $y_0 = 0$ entonces $y(t) \equiv 0$ es la única solución.

Si $t_0 > 0$ entonces $y(t) = \frac{t_0\, y_0}{t}$ es la única solución en $t \in (0, \infty)$.

Si $t_0<0$ entonces $y(t) = \frac{t_0 y_0}{t}$

en $t \in (-\infty, 0)$, única solución.



2.2 Ecuaciones lineales no homogéneas: método de variación de parámetros.

Lema Sean $a, b \in C(I; \mathbb{R})$, continuas, $I \subseteq \mathbb{R}$. Entonces la solución general y completa de la ecuación lineal no homogénea de primer orden

$$\frac{dy}{dt} + a(t) y = b(t) \quad \cdots (1)$$

está dada por

$$y(t) = e^{-\int_{t_0}^{t} a(s) ds} \left[C + \int_{t_0}^{t} e^{\int_{t_0}^{\xi} a(s) ds} b(\xi) d\xi \right] \quad \cdots (2)$$

con $C \in \mathbb{R}$ constante, $t_0 \in \mathbb{R}$ arbitrario.

Igualmente, la solución única al problema de valores iniciales con $y(t_0) = y_0 \in \mathbb{R}$, $t_0 \in I$, es

$$y(t) = e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)ds}\left[y_0 + \int_{t_0}^{t} e^{\int_{t_0}^{\xi} a(s)ds} b(\xi)d\xi \right] \quad \dots (3)$$

La fórmula (2) se conoce como "fórmula de variación de parámetros" (principio de Duhamel).

Demostración: Método 1 (variación de parámetros).

Supongamos que la solución es de la forma

$$y(t) = \hat{C}(t)\, e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)\, ds} \quad \dots (4)$$

con $\hat{C} = \hat{C}(t)$ "parámetro que varía con t". Suponemos $\hat{C} \in C^1(I)$. Derivando

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d\hat{C}}{dt} e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)ds} - a(t) \underbrace{\hat{C}(t)\, e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)ds}}_{=y(t)}$$

$$= \frac{d\hat{C}}{dt} e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)ds} - a(t)y(t)$$

$$= b(t) - a(t)y(t)$$

Sustituyendo en (1) obtenemos una ecuación para $\hat{C}$:

$$\frac{d\hat{C}}{dt} = b(t)e^{\int_{t_0}^{t} a(s)\, ds}$$

Integrando :

$$\hat{C}(t) = \int_{t_0}^{t} b(\xi)e^{\int_{t_0}^{\xi} a(s)\, ds} d\xi + C$$

donde $C = \hat{C}(t_0)$ (constante)
Sustituyendo en (4) obtenemos (2).

Método 2 : factor integrante

Mult. (1) por $e^{\int_{t_0}^{t} a(s)\, ds}$:

$$e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds} \frac{dy}{dt} + a(t)e^{\int_{t_0}^{t} a(s)\, ds} y =$$

$$= \frac{d}{dt}\left[y(t)e^{\int_{t_0}^{t} a(s)\, ds} \right]$$

$$= e^{\int_{t_0}^{t} a(s)\, ds} b(t)$$

Integrando en (t_0, t) :

$$y(t)e^{\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds} - y(t_0) = \int_{t_0}^{t} e^{\int_{t_0}^{\xi} a(s)\,ds} b(\xi)\,d\xi$$

Aquí $y(t_0) = C \Rightarrow$ obtenemos (2).

La nueva ecuación (tras multiplicar por $\mu = \exp\left(\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds\right)$) es exacta con

$$\tilde{B}(t,y) = e^{\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds} \neq 0$$

Por el teorema local de $\exists$ a ecuaciones exactas, si $y(t_0) = y_0$ es condición inicial entonces la única solución en una vecindad de $t_0 \in I$ es

$$y(t) = e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds}\left[y_0 + \int_{t_0}^{t} e^{\int_{t_0}^{\xi} a(s)\,ds} b(\xi)\,d\xi\right]$$

$t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$.

La solución se puede extender a todo I por el teorema de la función implícita ya que $\tilde{B} \neq 0$). La solución es completa, toda solución es de la forma (2)

$\square$