Lección 1.5: Trayectorias ortogonales.

Supongamos que

$$\Gamma = \{ (x, y_c(x)) \in \mathbb{R}^2 : \psi(x, y_c(x), c) = 0, \; x \in I \subset \mathbb{R}, \; c \in J \subset \mathbb{R} \} \quad \cdots (1)$$

es una familia de curvas en el plano parametrizada por $c \in J \subset \mathbb{R}$ y definida por $\psi \in C^1(I \times \mathbb{R} \times J; \mathbb{R})$ de modo que

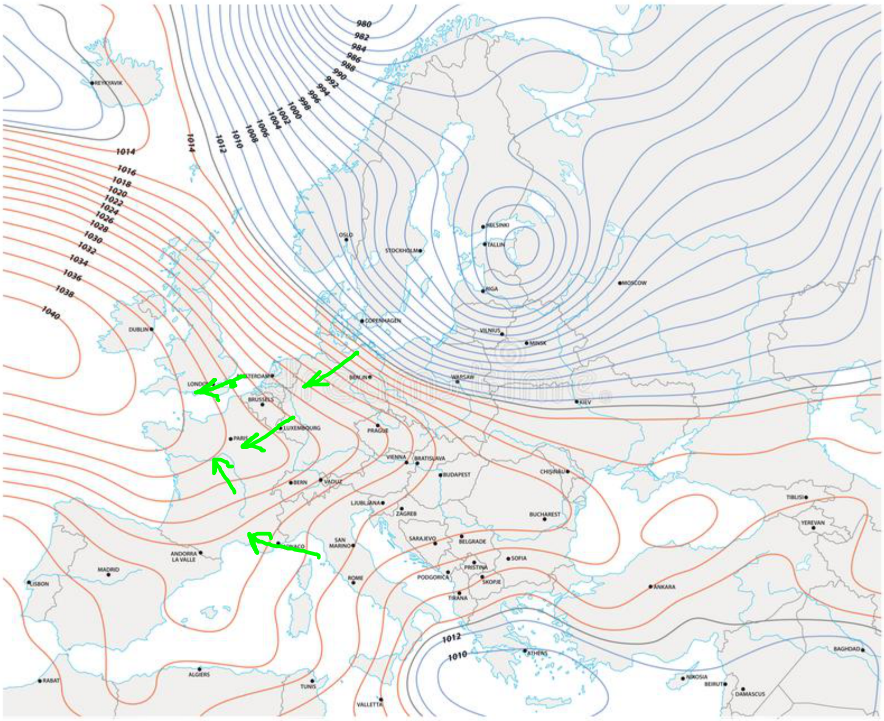
$$(2) \ldots \quad \psi(x, y_c(x), c) = 0 \quad \forall x \in I \subset \mathbb{R}, \; \forall c \in J \subset \mathbb{R}.$$

En aplicaciones nos interesa encontrar las trayectorias ortogonales a la familia de curvas Γ, es decir, todas las curvas que intersectan a todas y cada una de las curvas de la familia Γ.

Ejemplos:

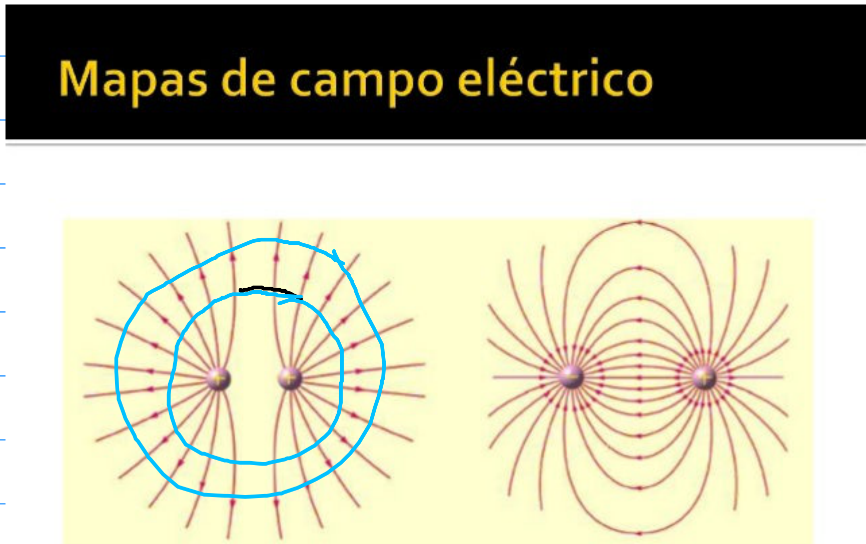
- Meteorología:

Estadística $\Rightarrow$ "isotermas" curvas de Temperatura constante.



• Electrostática :

cargas generan un campo eléctrico, $\bar{E} \in \mathbb{R}^3$
Trayectorias ortogonales a las líneas de equipotencial, curvas donde el potencial eléctrico es constante (voltaje).



Sea la familia Γ. Sean dos curvas en el plano:

$$x \mapsto (x, y(x)) \qquad x \in I \subset \mathbb{R}.$$
$$x \mapsto (x, w(x))$$

Intersección en ángulo recto ⇒ vectores tangentes son ortogonales

$$0 = \begin{pmatrix} 1 \\ y'(x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ w'(x) \end{pmatrix} = 1 + w'(x)y'(x).$$

Suponiendo $y'(x) \neq 0$ entonces

$$w'(x) = -\frac{1}{y'(x)} \qquad \ldots (3)$$

Para cada $C \in J \subset \mathbb{R}$ const. sea $x \mapsto (x, y_c(x))$, un elemento de Γ.
Derivamos (2):

$$0 = \frac{d}{dx} \psi(x, y_c(x), c)$$
$$= \psi_x(x, y_c(x), c) + \frac{dy_c}{dx} \psi_y(x, y_c(x), c)$$
$$\ldots (4)$$

Suponemos que podemos despejar C de (2): es decir,

$$(2) \Rightarrow \quad C = \hat{C}(x, y_c).$$

Sustituyendo

$$0 = \Psi_x(x, y_c(x), \hat{c}(x, y_c(x))) +$$

$$+ y_c'(x)\, \Psi_y(x, y_c(x), \hat{c}(x, y_c(x)))$$

$$= G(x, y_c, y_c') \qquad \cdots (5)$$

es decir,

$$G(x,y,p) := \Psi_x(x, y, \hat{c}(x,y)) + p\,\Psi_y(x,y,\hat{c}(x,y))$$

Por lo tanto para encontrar las trayectorias ortogonales hay que resolver

$$G\left(x, w(x), -\frac{1}{w'(x)}\right) = 0 \qquad \cdots (6)$$

Ejemplos :

(a) Hallar las trayectorias a la familia

$$x = c y^2, \qquad c \in \mathbb{R}$$

$$\Psi(x, y_c(x), c) = c\, y_c(x)^2 - x$$

Derivando : $\quad 1 = 2cyy'$

Despejando c : $\quad c = \dfrac{x}{y^2}$

Sustituyendo :

$$1 = 2\left(\frac{x}{y^2}\right) y y' = 2x \frac{y'}{y}$$

$$\Leftrightarrow \quad y' = \frac{y}{2x}$$

Ecuación de las trayectorias ortogonales :

$$y' = -\frac{1}{w'} = \frac{w}{2x} \quad \Leftrightarrow \quad w' = -\frac{2x}{w}$$

Ec. separable :

$$\frac{dw}{dx} = -\frac{2x}{w} \quad \Rightarrow \quad w\,dw = -2x\,dx$$

Integrando :

$$\frac{1}{2}w^2 = -x^2 + k \qquad k \in \mathbb{R} \text{ constante}$$

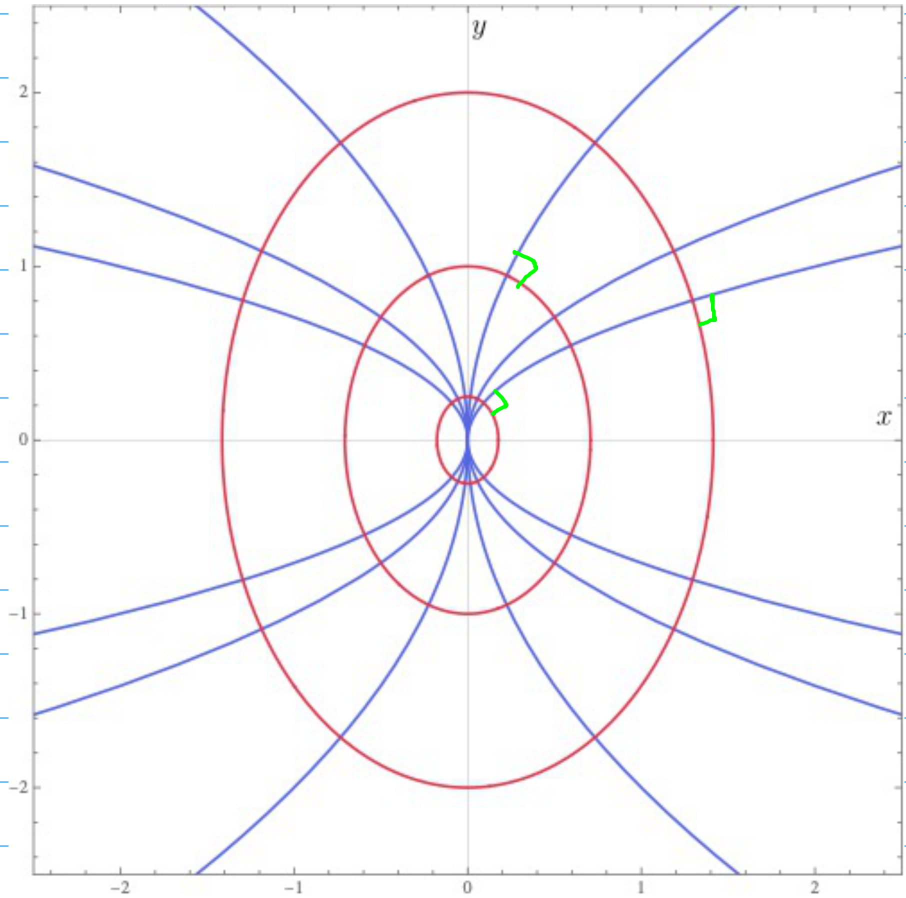
$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}w^2 + x^2 = k \geq 0$$

Identificamos

$$w \leftrightarrow y$$

Familia : $x = Cy^2, \quad C \in \mathbb{R}$

Trayectorias ortogonales : $\frac{1}{2}y^2 + x^2 = k, \quad k \geq 0.$



(b) Hallar trayectorias ortogonales a la familia de círculos que pasan por $(-1,0)$ y $(1,0)$.

$$\mathcal{C} = \{ (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2 \}$$ círculo centro (x_0, y_0), $r > 0$ radio.

$$(1,0) \in \mathcal{C} \Rightarrow (1-x_0)^2 + y_0^2 = r^2$$

$$(-1,0) \in \mathcal{C} \Rightarrow (-1-x_0)^2 + y_0^2 = r^2$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} x_0^2 + y_0^2 + 1 + 2x_0 = r^2 \\ x_0^2 + y_0^2 + 1 - 2x_0 = r^2 \end{array}$$

$$\Rightarrow x_0 = 0, \quad r^2 = 1 + y_0^2$$

círculos con centro en $(0, y_0)$, $y_0 \in \mathbb{R}$, con radio $r = \sqrt{1+y_0^2} > 0$.

$y_0 = C \in \mathbb{R}$ (parámetro)

$$\Gamma: \quad x^2 + (y-c)^2 = 1+c^2$$

Derivando: $\quad 2x + 2(y-c)y' = 0$

Despejando c: $\quad x^2 + y^2 - 2cy + c^2 = 1 + c^2$

$$\Rightarrow \quad c = \frac{x^2+y^2-1}{2y}$$

sustituyendo:

$$2x + 2\left(y - \frac{(x^2+y^2-1)}{2y}\right)y' = 0$$

$$\Rightarrow \quad 2xy + (y^2 - x^2 + 1)\,y' = 0$$

La ecuación de las ortogonales debe ser:

$$2x \cdot w + (w^2 - x^2 + 1)\left(\frac{-1}{w'}\right) = 0$$

Mult. por w'/x^2:

$$\frac{2}{x} w w' - \frac{w^2}{x^2} + 1 - \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\iff \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{w^2}{x}\right) = \frac{1}{x^2} - 1$$

Integrando:

$$\frac{w^2}{x} = -\frac{1}{x} - x + k, \quad k \in \mathbb{R} \text{ constante.}$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{x^2 + w^2 + 1 - kx}_{= w^2 + (x - \frac{k}{2})^2 - \frac{k^2}{4}} = 0$$

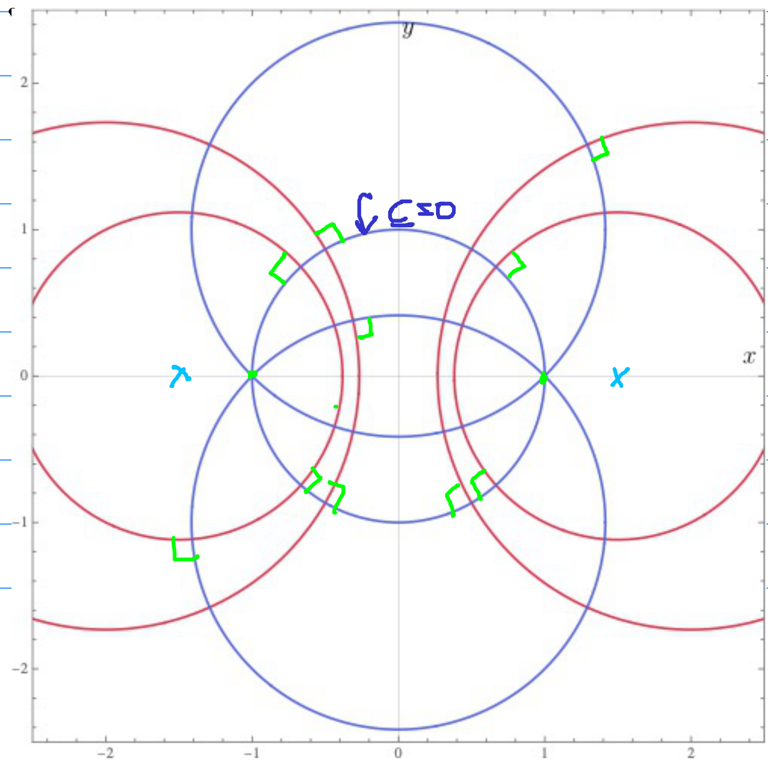
$\alpha = \frac{k}{2}$

$$0 \leq w^2 + (x-\alpha)^2 = \alpha^2 - 1$$

$$\alpha \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$$

$w \leftrightarrow y$: $\quad y^2 + (x-\alpha)^2 = \alpha^2 - 1 \quad |\alpha| \geq 1$

círculos con centro en $(\alpha, 0)$
radio $\rho = \sqrt{\alpha^2 - 1} \geq 0$.



$|\alpha| \geq 1$