Lección 1.4: Ecuaciones elementales.

(a) Ecuación de primer orden directamente integrable

Sea la ecuación

$$\frac{dy}{dt} = f(t) \qquad \cdots (1)$$

para $t \in I \subset \mathbb{R}$, $f = f(t)$ conocida. Tenemos una familia de soluciones parametrizada por $C \in \mathbb{R}$:

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} f(s)\, ds + C \qquad \cdots (2)$$

con $t_0 \in \mathbb{R}$ arbitrario; si imponemos una condición inicial

$$y(t_0) = y_0 \qquad \cdots (3)$$

con $y_0 \in \mathbb{R}$ dado entonces con $y_0 = C$ es una solución particular.

La familia (2) es una familia completa (no hay soluciones singulares): esto es consecuencia del teorema fundamental del cálculo.

Además sólo requerimos: f integrable.

(b) Ecuación de orden $m \geq 1$ directamente integrable.

Sea
$$\frac{d^m y}{dt^m} = f(t) \qquad \cdots (4)$$

$m \geq 1$, $f(t)$ conocida, integrable.

Integrando:
$$\frac{d^{m-1} y}{dt^{m-1}} = \int_{t_0}^{t} f(s)\, ds + C_1$$

$$\frac{d^{m-2} y}{dt^{m-2}} = \int_{t_0}^{t} \int_{t_0}^{\tau_1} f(s)\, ds\, d\tau_1 + $$
$$+ C_1 (t - t_0) + C_2$$

$$\vdots$$

La solución es:
$$y(t) = \int_{t_0}^{t} \int_{t_0}^{\tau_{m-1}} \cdots \int_{t_0}^{\tau_1} f(s)\, ds\, d\tau_1 \cdots d\tau_{m-1} +$$
$$+ \frac{C_1}{m!} (t - t_0)^m + \frac{C_2 (t - t_0)^{m-1}}{(m-1)!} + \ldots +$$
$$+ C_{m-1} (t - t_0) + C_m \qquad \cdots (5)$$

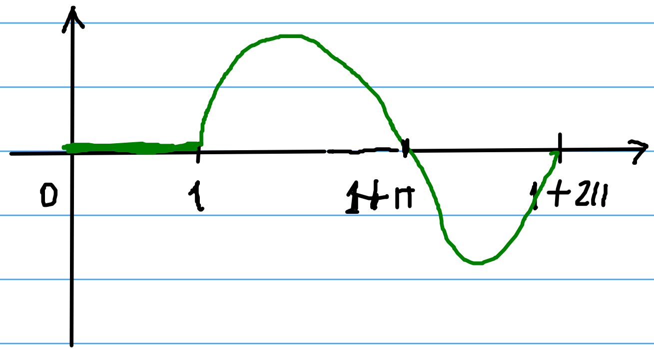
Familia completa de soluciones parametrizada por $(C_1, \ldots, C_m) \in \mathbb{R}^m$

Ejemplo: sea el problema

$$(6)\ldots \qquad my'' = f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq 1 \\ \sin(t-1), & t \geq 1 \end{cases}$$

con $m>0$ constante y forzamiento f

$f(t) =$



Para cualquier $t \geq 0$, familia de soluciones

$$y(t) = \frac{1}{m} \int_0^t \int_0^\tau f(s)\, ds\, d\tau + C_1 t + C_2$$

Si $t \in [0,1]$ entonces $f(s) \equiv 0 \quad \forall s \in (0,\tau)$ con $\tau \leq t$.

Si $t \geq 1$ entonces

$$\int_0^t \int_0^\tau f(s)\, ds\, d\tau = \int_1^t \int_1^\tau \sin(s-1)\, ds\, d\tau$$

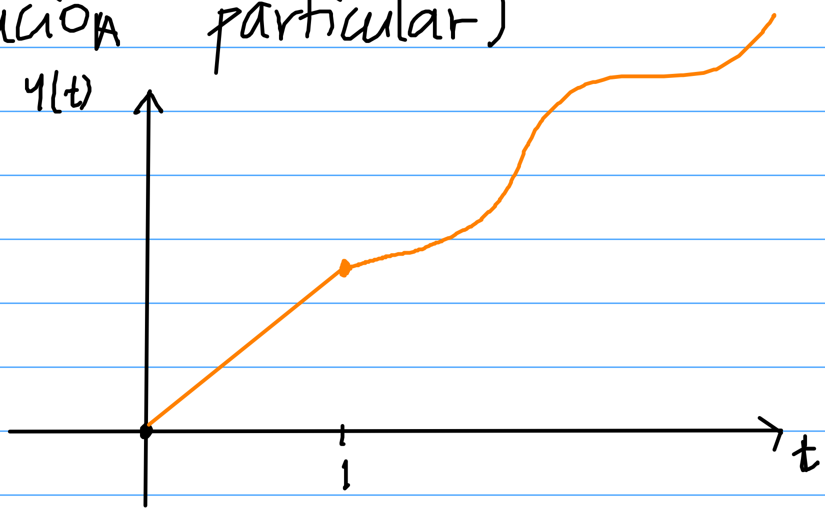
$$= \int_1^t \left(1-\cos(\tau-1)\right) d\tau$$

$$= (t-1) - \sin(t-1)$$

Familia completa de soluciones:

$$y(t) = \begin{cases} c_1 t + c_2, & 0 \leq t \leq 1 \\ \frac{1}{m}\left((t-1) - \sin(t-1) \right) + C_1 t + C_2, & t \geq 1 \end{cases}$$

Si $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ entonces $c_2 = 0$, $c_1 = 1$ (solución particular)



(c) Ecuación separable de primer orden.

Forma general:

$$\frac{dy}{dt} = g(y) f(t) \qquad \cdots (7)$$

con $g = g(y)$, $f = f(t)$ conocidas.

Nótese que si $g(y_*) = 0$ con $y_* \in \mathbb{R}$ entonces y_* es un punto de equilibrio:

$y(t) \equiv y_*$ es solución de (7).

Los ceros de g nos dan soluciones constantes de (7).

Suponemos : $g(y_0) \neq 0$, g continua.
El problema de valores iniciales con $y(t_0) = y_0$, $t_0 \in \mathbb{R}$, se puede resolver integrando :

$$\frac{1}{g(y)} \frac{dy}{dt} = f(t)$$

$$\Rightarrow \int_{t_0}^{t} \frac{dy(s)}{ds} \frac{ds}{g(y(s))} = \int_{t_0}^{t} f(s)\, ds$$

Cambio de variables $\quad y = y(s), \quad y(t_0) = y_0$

$$\Rightarrow \int_{y_0}^{y(t)} \frac{dy}{g(y)} = \int_{t_0}^{t} f(s)\, ds \quad \ldots (8)$$

Con suerte, podemos integrar el lado izq. para obtener una relación implícita

$$Q(y(t), y_0) = F(t) := \int_{t_0}^{t} f(s)\, ds$$

Posiblemente podemos despejar $y(t)$.

(8) justifica $\quad \dfrac{dy}{g(y)} = f(t)\, dt \quad \ldots (9)$

Forma diferencial de la ecuación separable (7). Integrando (9):

$$(10)\ldots \quad Q(y) = \int \frac{dy}{g(y)} = F(t) + C$$

$$F(t) = \int f(t)\, dt$$

$C \in \mathbb{R}$ constante.

(10) es una familia completa de soluciones (implícita) si las integrables son calculables.

Ejemplo: es posible producir H_2O a partir de H_2 y O_2 (gases). Basta con calentar la mezcla de los gases (energía de activación para iniciar la reacción).

Tasa de reacción en el tiempo es proporcional al prod. del # de átomos de H_2 y # de átomos de O_2 presentes a tiempo t.

Sea $0 < \alpha$ - # de átomos de H_2
$0 < \beta$ - " " O_2

Sea $x(t)$ - # de moléculas de H_2O que se producen a tiempo $t > 0$.

$$\frac{dx}{dt} = k(\alpha - 2x)(\beta - x) \quad \cdots (11)$$

donde $k>0$ es una constante

$$x(0) = 0$$

(11) es una ecuación separable.

$$(11) \iff k\,dt = \frac{dx}{(\alpha-2x)(\beta-x)}$$

Integrando,

$$kt = \int \frac{dx}{(\alpha-2x)(\beta-x)} + C_1$$

Caso (i): $\alpha \neq 2\beta$. Por fracciones parciales

$$kt = \int \frac{1}{(\alpha-2\beta)}\left(\frac{1}{\beta-x} - \frac{2}{\alpha-2x}\right) dx + C_1$$

$$= \frac{1}{\alpha-2\beta} \log\left(\frac{\alpha-2x}{\beta-x}\right) + C_1$$

log - logaritmo natural.

Como $x(0)=0 \Rightarrow C_1 = -\dfrac{\log(\alpha/\beta)}{(\alpha-2\beta)}$

Sustituyendo:

$$kt = \frac{1}{\alpha - 2\beta} \log\left(\frac{\beta(\alpha-2x)}{\alpha(\beta-x)}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\alpha-2x}{\beta-x} = \frac{\alpha}{\beta} \exp\left((\alpha-2\beta)kt\right)$$

Despejando

$$(12) \ldots \quad x(t) = \frac{\alpha\left[1 - \exp\left(\overbrace{(\alpha-2\beta)}^{\neq 0}kt\right)\right]}{2 - \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\exp\left((\alpha-2\beta)kt\right)}$$

Así:

- si $\alpha > 2\beta$ entonces $x(t) \to \beta$ si $t \to \infty$
- si $\alpha < 2\beta$ entonces $x(t) \to \frac{\alpha}{2}$ si $t \to \infty$

Interpretación: si alguno de los reactantes se agota no hay reacción.

caso (ii): $\alpha = 2\beta$. Aquí:

$$kt = \int \frac{dx}{2(\beta-x)^2} + C$$

$$= \frac{1}{2(\beta-x)} + C$$

$$x(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad kt = \frac{1}{2(\beta-x)} - \frac{1}{2\beta}$$

$$\exists \quad x(t) = \beta - \frac{1}{2kt + (1/\beta)} \quad \cdots (13)$$

$x(t) \to \beta$ si $t \to \infty$.

(11) modela una reacción quím. de 2o. orden.

Generalización:

- 2 sustancias se combinan a razón a/b, $a>0$, $b>0$ para producir una nueva sustancia x.

- $x(t)$ – cantidad de la nueva sust. a tiempo t, entonces las cantidades de los reactantes originales que restan son

$$A - \frac{a}{a+b}x, \quad B - \frac{b}{a+b}x$$

A, B cantidades iniciales

- tasa de reacción es $\propto$ al prod. de las cantidades restantes:

$$\frac{dx}{dt} = k\left(A - \frac{a}{a+b}x\right)\left(B - \frac{b}{a+b}x\right) \quad \cdots (14)$$

[14] es conocida como la ley de acción de masas.

Reacción de orden $n \geq 1$:

$$\frac{dx}{dt} = k\left(A_1 - \frac{a_1}{\sum a_j} x\right)\left(A_2 - \frac{a_2}{\sum a_j} x\right)(\cdots)\left(A_n - \frac{a_n}{\sum a_j} x\right)$$