Ramón G. Plaza

Lección 1.3: Condiciones iniciales. Familias de soluciones.

1.2 Nociones básicas: problemas con valores iniciales. Trayectorias ortogonales.

Definición de EDO de orden $m \in \mathbb{N}$:

$$(1).- \quad F\left(t, y(t), y'(t), y''(t), \ldots, \frac{d^m y}{dt^m}\right) = 0$$

$$\forall t \in I \subset \mathbb{R}$$

orden $m \in \mathbb{N}$, $F : \Omega \subset \mathbb{R}^{m+2} \longrightarrow \mathbb{R}$ conocida; $y \in C^m(I;\mathbb{R})$ es solución si cumple con (1).

<u>Definición</u> Un problema de valores iniciales para la ecuación (1) consiste en resolver la ecuación sujeta a m condiciones de la forma

$$\left.\begin{aligned} y(t_0) &= y_0 \\ y'(t_0) &= y_1 \\ &\vdots \\ \frac{d^{m-1}y(t_0)}{dt^{m-1}} &= y_{m-1} \end{aligned}\right\} \quad .. (2)$$

para cierto $t_0 \in \mathbb{R}$, con $(y_0, \ldots, y_{m-1}) \in \mathbb{R}^m$ dado.

Ejemplos:

(a) Ecuación de primer orden, lineal, no autónoma:

$$(3) \ldots \quad \frac{dy}{dt} = \underbrace{\sin t} + y, \qquad y(0) = y_0 \in \mathbb{R}$$

$m = 1$

Intuición: sin el término de forzamiento

$$(4) \ldots \quad \frac{dy}{dt} = y$$

cuyas soluciones son de la forma $y = Ce^t$, con $C \in \mathbb{R}$ constante.

Truco: método de variación de constantes (o parámetros). Proponer una solución de (3) de la forma

$$y(t) = C(t)e^t \qquad \ldots \quad (5)$$

donde $C(t)$ es una "constante que varía con t".

Derivando (5):

$$\frac{dy}{dt} = C'(t)e^t + C(t)e^t$$

$$= C'(t)e^t + y(t)$$

$$= \sin t + y(t)$$

$$\Rightarrow \quad C'(t) = e^{-t} \sin t$$

ecuación dif. para $C(t)$ integrable directamente.

$$\Rightarrow \quad C(t) = \int e^{-t} \sin t \, dt \quad + \quad C_0$$

$C_0 \in \mathbb{R}$ constante.

Integrando por partes:

$$\int e^{-t} \sin t \, dt = \int \frac{d}{dt}(-e^{-t}) \sin t \, dt$$
$$= -e^{-t} \sin t + \int e^{-t} \cos t \, dt$$

$$\int e^{-t} \sin t \, dt = \int e^{-t} \frac{d}{dt}(-\cos t) \, dt$$
$$= -e^{-t} \cos t - \int e^{-t} \cos t \, dt$$

Sumando:

$$\int e^{-t} \sin t \, dt = -\frac{1}{2} e^{-t} (\sin t + \cos t)$$

Así,

$$Y(t) \underset{(5)}{=} C(t) e^{t} = \left(-\frac{1}{2} e^{-t} (\sin t + \cos t) + C_0 \right) e^{t}$$

$$\Rightarrow \quad Y(t) = C_0 e^{t} - \frac{1}{2} (\sin t + \cos t)$$

Como queremos $Y(0) = Y_0 \in \mathbb{R}$ dado, entonces

$$y(0) = c_0 - \frac{1}{2} = y_0 \quad \Rightarrow \quad c_0 = y_0 + \frac{1}{2}$$

solución:

$$(6) \ldots \quad y(t) = \left(y_0 + \frac{1}{2}\right)e^t - \frac{1}{2}(\sin t + \cos t)$$

(6) es solución:

- $y(0) = y_0$ ✓
- $y'(t) = \underbrace{\left(y_0+\frac{1}{2}\right)e^t - \frac{1}{2}(\cos t - \sin t) + - \sin t}_{= y(t)} + \sin t$

$$= y(t) + \sin t \qquad ✓ \text{ ok.}$$

¿Es única?

Supongamos que $y_1 = y_1(t)$, $y_2 = y_2(t)$ son dos soluciones de (3). Es decir,

$$y_j' = \sin t + y_j, \qquad y_j(0) = y_0 \quad \forall\, j = 1,2$$

Sea $y(t) := y_2(t) - y_1(t)$. Entonces

$$\frac{dy}{dt} = \sin t + y_2 - (\sin t + y_1)$$

$$= y_2 - y_1 = y$$

con $y(0) = y_0 - y_0 \equiv 0$.

$y(t)$ es solución de $\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 0 \end{cases}$

$$y(t) = ke^t, \quad y(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad k = 0.$$

$$\Rightarrow \quad y(t) = y_2(t) - y_1(t) \equiv 0 \quad \forall t.$$

$\therefore$ unicidad.

(b) Ecuación de primer orden, no lineal.

Sea el problema:

$$\frac{dy}{dt} = 1 + y^2, \quad y(0) = \begin{cases} 0 \\ C \in \mathbb{R} \end{cases} \quad \cdots (7)$$

Adivinando: $\quad y(t) = \tan t$

Es solución: $\quad \cdot\; y(0) = 0$

$$\cdot\; \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(\tan t) = 1 + \tan^2 t = 1 + y^2$$

La solución existe sólo si $t \in (-\pi/2, \pi/2)$.

Si tomamos $y(0) = C \in \mathbb{R}$, arbitraria la solución es una familia parametrizada por $C \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ Familias de soluciones a ecuaciones diferenciales.

(c) Ecuación de primer orden implícita, no lineal.

Sea: $(y')^2 + 4y - 4ty' = 0 \quad \cdots (8)$

Proponemos: $y' = c$ constante $c \in \mathbb{R}$.

$$c^2 + 4y - 4tc = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad y = ct - \frac{1}{4}c^2$$

Familia ∞ de soluciones parametrizada por $c \in \mathbb{R}$.

Sin embargo, no todas las soluciones pertenecen a esta familia; ejemplo:

$$y(t) = t^2.$$

Es solución: $y' = 2t$ $\leftarrow$ sol. singular

$$\therefore \quad (y')^2 + 4y - 4ty' =$$

$$= 4t^2 + 4t^2 - 8t^2 \equiv 0 \quad \forall t$$

caso especial de la ecuación de Clairaut:

$$y = ty' + f(y')$$

con $f(\xi) = \frac{1}{2}\xi^2$.

<u>Definición</u> Sea la ecuación

$$F\left(t, y(t), \ldots, \frac{d^m y}{dt^m}\right) = 0$$

una solución de la forma

$$y = y(t, r_1, r_2, \ldots, r_m)$$

que depende de m parámetros, $r_1, \ldots, r_m \in \mathbb{R}$, se denomina una familia de soluciones si satisface la ecuación para cada $r_1, \ldots, r_m \in \mathcal{R} \subset \mathbb{R}^m$ (valores admisibles de los parámetros). Si <u>toda</u> solución pertenece a la familia entonces la familia es <u>completa</u>. Si existe una (o más) soluciones que <u>no</u> pertenecen a la familia entonces éstas se denominan <u>singulares</u> y la familia es incompleta. Cada solución con una elección fija de los parámetros $r_1, \ldots, r_m$ se denomina solución particular.

Ejemplos:

(a) Sea la ecuación

$$|y'| + |y| = 0.$$

La única solución es $y(t) \equiv 0$.

(b) Consideremos

$F(p) = 1 + p^2 = 0$

$$F(y') = 1 + (y')^2 = 0, \qquad y(0) = c$$

No tiene soluciones.

(c) Sea la ecuación

$$(y')^2 = 4y$$

¿Existe una familia de soluciones?

La familia de parábolas

$$y(t) = (t+c)^2, \qquad c \in \mathbb{R}$$

es una familia de soluciones.

$$y'(t) = 2(t+c) \Rightarrow (y')^2 = 4(t+c)^2 = 4y \quad ✓$$

Pero no es una familia completa: $y(t) \equiv 0$ también es solución.