Lección 1.1: Motivación. Ejemplos.

Sección 1: Introducción.

1.1 Motivación y ejemplos.

¿Qué es una ED?
¿Por qué estudiar EDs?

Una ED es una relación entre una función u y sus derivadas. Si u depende de una sola variable la ecuación se denomina ordinaria.

Definición Sea $m \in \mathbb{N}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{m+2}$ un conjunto abierto, y $F : \Omega \to \mathbb{R}$ una función dada. Si $u \in C^m(I;\mathbb{R})$ es una función real, m veces diferenciable en $t \in I \subseteq \mathbb{R}$, con derivadas continuas que satisface

$$(1) \ldots \qquad F\big(t, u(t), u'(t), u''(t), \ldots, u^{(m)}(t)\big) = 0 \qquad \forall\, t \in I$$

entonces se dice que u satisface la ecuación diferencial ordinaria (1) de orden m.

Aquí $u' = \dfrac{du}{dt}$, $u'' = \dfrac{d^2u}{dt^2}$, $\ldots$, $u^{(m)} = \dfrac{d^m u}{dt^m}$

Si F es de la forma

$$(2) \ldots \qquad F = u^{(m)} - G\big(t, u, u', \ldots, u^{(m-1)}\big)$$

Con $G : \tilde{\Omega} \to \mathbb{R}$, $\tilde{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^{m+1}$, se dice que la ecuación está explícita. De otro modo está en forma implícita.

Observación

(a) Estamos suponiendo que

$$(t, u(t), u'(t), \dots, u^{(m)}(t)) \in \Omega \quad \forall t \in I.$$

(b) Las ecuaciones (1) y (2) son escalares (una sola incógnita u).

(c) ¿Quién es F? Modelación matemática.

¿Por qué estudiar EDs?

- Gran diversidad de aplicaciones.
- Naturaleza determinista.
- Alta efectividad.
- Capacidad de interacción.

Estudio de EDs:

(A) Modelación: proponer un modelo cuantitativa para describir/comprender un fenómeno.

(B) "Buen planteamiento": - unicidad $\boxed{\text{Hadamard}}$
- existencia
- estabilidad

Problema $\equiv$ ED + condiciones
(iniciales, frontera, comportamiento asintótico)

(C) "Solución" de un problema:
- soluciones explícitas ?
- " aproximadas ?
- " numéricas ?

(D) Teoría cualitativa: deducir información <u>sin</u> resolver el problema.

(E) Estabilidad: cambios pequeños en los "datos" inducen cambios cuantificables en la solución.

<u>Terminología básica</u>

Variables dependientes (incógnitas): $u, y, x,$ etc.

" independientes: $t, u, x, y,$ etc.

Si F en (1) <u>no</u> depende explícitamente de $t \in \mathbb{R}$, entonces (1) es <u>autónoma</u>.

Sistemas autónomos son invariantes bajo

$$t \mapsto t - \xi \qquad \xi \in \mathbb{R}$$

Ejemplo: péndulo simple

$$F(\theta, \theta'') = \theta'' + \sin\theta = 0 \quad \dots (4)$$

θ - $\theta = \theta(t)$, ángulo, var. dependiente.

$$\theta'' = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$t \in \mathbb{R}$ tiempo, var. indep.

(4) es autónoma.

Si añadimos forzamiento:

$$\theta'' + \sin\theta = f(t) \quad \dots (5)$$

entonces la ec. no es autónoma.

El grado de una ED es la potencia de la derivada de orden más alto.

p. ej.

$$(y'')^3 + by' = \cos x \quad \dots (6)$$

$y = y(x)$ $\qquad$ $y'' = d^2y/dx^2$

$x \in I \subset \mathbb{R}$ $\qquad$ $y' = dy/dx$

(6) es de 2o. orden, de grado 3.

Importante: una ED de orden m de la forma (1) es lineal si F es lineal en u y en todas sus derivadas.

Ej. • $u'' + u = 0$
• $y'' + 3y = \sin x$ son lineales

La ecuación, $y' + \frac{1}{y} = 0$ no es lineal.

Toda ecuación lineal es necesariamente de grado 1.

(4) es de orden 2, grado 1, no lineal.

Bajo esta definición la ED lineal de orden m tiene la forma:

$$(7)\ldots \begin{cases} a_m(t)\dfrac{d^m u}{dt^m} + a_{m-1}(t)\dfrac{d^{m-1} u}{dt^{m-1}} + \ldots + a_2(t)\dfrac{d^2 u}{dt^2} + \\ \qquad + a_1(t)\dfrac{du}{dt} + a_0(t)\, u = f(t) \end{cases}$$

$a_j(t)$ - coeficientes, $a_j \in C, C_b$, etc.

Si $f(t) \equiv 0$ la ec. es homogénea.

Ej. Sea la ecuación:

$$x u' - 3u + 3 = 0 \quad \ldots (8)$$

$u = u(x)$, $x \in I \subset \mathbb{R}$.

- no tiene solución si $u(0) = 0$
- tiene una única solución si $u(1) = 1$, $u(x) \equiv 1$.
- tiene ∞ soluciones, $u(x) = 1 + cx^3$, $c \in \mathbb{R}$ si $u(0) = 1$.

La solución a ED es explícita si podemos encontrar $u = u(t)$. Ej.

$$\frac{du}{dt} = e^{-t^2}$$ tiene una solución:

$$u(t) = 1 + \int_0^t e^{-s^2}\, ds$$

solución explícita.