Ecuaciones Diferenciales Parciales

Semestre 2026-2

Tarea 3: Ecuaciones de Laplace y de Poisson

1. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y acotado, y supongamos que $u \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ es solución de $\Delta u = u^3 - u$ en Ω, con $u = 0$ sobre $\partial\Omega$. Demuestra que $|u| \leq 1$. *Sugerencia:* Define $\mathcal{U}^+ = \{x \in \Omega \,:\, u(x) > 1\}$ y supón que es no vacío.

2. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, abierto, con $n \geq 2$. Sean $u \in C^2(\Omega)$ y $x \in \Omega$. Demuestra que

$$\Delta u(x) = \lim_{r \to 0^+} \frac{2n}{r^2} \left(\frac{1}{\omega_n} \int_{|\eta|=1} u(x + r\eta)\, dS_\eta \,-\, u(x) \right).$$

Nótese que esta fórmula implica la propiedad del promedio en caso de que la función sea armónica. (*Sugerencia:* Considera la expansión de Taylor de segundo orden alrededor de x.)

3. Sea la bola unitaria $B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, |x| < 1\}$. Demuestra que existe una constante positiva $C > 0$, que depende únicamente de la dimensión $n \geq 2$, tal que

$$\max_{B_1(0)} |u| \leq C \left(\max_{B_1(0)} |f| + \max_{\partial B_1(0)} |g| \right),$$

donde $f \in C(\,\overline{B_1(0)}\,)$, $g \in C(\partial B_1(0))$ y u es la solución de

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{en } B_1(0), \\ u = g, & \text{sobre } \partial B_1(0). \end{cases}$$

4. Encuentra la solución al problema

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0, && \text{en } D, \\ u &= 1 + 3\sin\theta, && \text{sobre } \partial D, \end{aligned}$$

donde $D \subset \mathbb{R}^2$ es el disco $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, r^2 = x^2 + y^2 < a^2\}$, con $a > 0$ constante, $(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$, $r > 0$, $\theta \in [0, 2\pi)$. (*Sugerencia:* Aplica la fórmula de Poisson para la bola.)

5. Sea $\Omega = \{a_1 < |x| < a_2\} \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, donde $a_2 > a_1 > 0$. Sea u armónica en Ω. Definimos

$$I(\rho) = \frac{1}{\omega_d \rho^{d-1}} \int_{|x|=\rho} u(x)\, dS_x, \qquad \rho \in (a_1, a_2).$$

Probar que $I(\rho)$ tiene la forma

$$I(\rho) = \begin{cases} \alpha + \beta\rho^{2-n}, & n \geq 3, \\ \alpha + \beta \log\rho, & n = 2, \end{cases}$$

encontrando las constantes α y β en función de $I(a_1)$ y de $J_1 := \int_{|x|=a_1} \frac{\partial u}{\partial n}\, dS_x$. Usar el hecho que

$$\int_{\partial(a_1 < |x| < \rho)} u(x) \frac{\partial \Phi(x)}{\partial n_x} - \Phi(x) \frac{\partial u(x)}{\partial n_x}\, dS_x = 0,$$

donde $\Phi = \Phi(x - y)$ es la solución fundamental.

6. Sean

$$B_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x^2 + y^2 < 1\},$$
$$B_1^+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x^2 + y^2 < 1, \, y > 0\}.$$

Sea $u \in C^2(B_1^+) \cap C(\overline{B_1^+})$, armónica en B_1^+ y tal que $u(x,0) = 0$. Demuestra que la función

$$v(x,y) = \begin{cases} u(x,y), & y \geq 0, \\ -u(x,-y), & y < 0, \end{cases}$$

es armónica en B_1. A esto se le conoce como el *principio de reflexión de Schwarz.* (*Sugerencia:* Sea w la solución al problema $\Delta w = 0$ en B_1, $w = v$ en ∂B_1. Define $V(x,y) = w(x,y) + w(x,-y)$. Prueba que $V \equiv 0$.)

7. Para $n = 2$, encuentra la función de Green asociada al laplaciano en el primer cuadrante, $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x > 0, \, y > 0\}$.

8. Sea

$$u(x) = \frac{1}{|x|}, \qquad x \in \mathbb{R}^3.$$

(a) Prueba que $\Delta u = 0$ en $\mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$.

(b) Calcula

$$I = \int_{|x|=\rho} \frac{\partial u}{\partial n_x} \, dS_x.$$

¿El resultado contradice el hecho de que $\int_{\partial \Omega} \frac{\partial u}{\partial n} \, dS = 0$ para toda u armónica en Ω?

Total: 100 pts.