Ecuaciones Diferenciales Parciales

Semestre 2026-2

Tarea 2: Ecuación de onda

1. Sean $f, g \in C_0^1(\mathbb{R})$, es decir, de clase C^1 y de *soporte compacto* ($f = g \equiv 0$ fuera de un intervalo acotado $|x| \leq R$, para cierto $R > 0$). Demuestra que cualquier solución $u \in C^2(\mathbb{R} \times (0, \infty))$ de

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0, & x \in \mathbb{R},\ t \geq 0, \\ u(x,0) &= f(x), & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x,0) &= g(x), & x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

es de soporte compacto (en la variable x, y con diferente R, por supuesto), para cada $t > 0$ *fijo*. Dado que la solución tiene la forma $u(x,t) = F(x+ct) + G(x-ct)$, prueba que las funciones $F, G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tienen soporte compacto sólo cuando

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(y)\, dy = 0.$$

2. Sean $v = v(x,t)$ y $u = u(x,t)$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$, dos soluciones de la ecuación de onda homogénea en una dimensión espacial,

$$\Box u := u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0.$$

(a) Prueba que $\Box(u_t v_t + c^2 u_x v_x) = 0$.

(b) Suponiendo que u es solución de $\Box u = 0$ en $(x,t) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty)$, con condiciones

$$\begin{aligned} u(x,0) &= f(x), \quad x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x,0) &= g(x), \quad x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

donde f y g son funciones de clase C^1 y de *soporte compacto* (es decir, $f = g \equiv 0$ fuera de un conjunto compacto en $\mathbb{R}$), entonces demuestra que la *energía total*,

$$E(t) = E_{\text{cin}}(t) + E_{\text{pot}}(t),$$

es constante en t, donde las energías cinética y potencial son

$$E_{\text{cin}}(t) = \tfrac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} u_t^2(x,t)\, dx, \quad \text{y} \quad E_{\text{pot}}(t) = \tfrac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} c^2 u_x^2(x,t)\, dx,$$

respectivamente. (*Sugerencia:* Usa (a) para calcular dE/dt. Aplica la fórmula de d'Alembert y el hecho de que f, g y todas sus derivadas se anulan fuera de un conjunto compacto.)

(c) Bajo las mismas hipótesis que en el inciso (b), demuestra el principio de *equipartición de la energía*: existe $T > 0$ tal que $E_{\text{cin}}(t) = E_{\text{pot}}(t)$ para todo $t \geq T$.

3. Aplicando el principio de Duhamel, resuelve el siguiente problema de valores iniciales:

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= xt, && x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(x,0) &= e^x, && x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x,0) &= \sin x, && x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

con $c > 0$ constante. Verifica que la función encontrada es, efectivamente, solución del problema.

4. Resuelve el siguiente problema con valores iniciales y de frontera:

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= h(x,t), && x \in (0,L),\ t > 0, \\ u(x,0) = u_t(x,0) &= 0, && x \in [0,L], \\ u_x(0,t) = u_x(L,t) &= 0, && t \geq 0, \end{aligned}$$

donde $L > 0$ es constante y la función $h = h(x,t)$ está dada por

$$h(x,t) = e^{-t} \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right).$$

Sugerencia: Por separación de variables, considera una solución de la forma $u(x,t) = v(t)\cos(\pi x/L)$.

5. Suponiendo que $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \times (0,+\infty))$ es solución de

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 \Delta_x u &= 0, && x \in \mathbb{R}^3,\ t \geq 0, \\ u(x,0) &= f(x), && x \in \mathbb{R}^3, \\ u_t(x,0) &= g(x), && x \in \mathbb{R}^3, \end{aligned}$$

donde f, g son suaves y de soporte compacto, demuestra que existe una constante $C > 0$ tal que

$$|u(x,t)| \leq \frac{C}{t}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^3$, $t > 0$. (*Sugerencia:* Usa la fórmula de Kirchhoff.)

6. Considera el problema

$$u_{tt} - \Delta u = 1,$$

donde $u = u(x,y,z,t)$ (es decir, en $\mathbb{R}^3$), con condiciones iniciales

$$u_{|t=0} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \qquad u_{t|t=0} = x^2 + y^2 + z^2.$$

(a) Expresa el laplaciano en coordenadas esféricas

$$(x,y,z) = (r\cos\phi\sin\theta, r\sin\phi\sin\theta, r\cos\theta),$$

donde $r \geq 0$, $\theta \in [0,\pi)$, $\phi \in [0,2\pi)$.

(b) Encuentra una solución que sólo dependa de $r = |\boldsymbol{x}|$, $\boldsymbol{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. (*Sugerencia:* Reducir el problema a la ecuación de onda no homogénea en una dimensión para $r > 0$, $t > 0$. Aplica la identidad de Green-Lagrange y analiza los casos $r \geq t$ y $r < t$.)

(c) Discute la diferenciabilidad de la solución del inciso (b) en la curva $t = |\boldsymbol{x}|$.

(d) Encuentra la solución del problema directamente: primero encuentra *una* solución a

$$\begin{aligned} u_{tt} - \Delta_x u &= 1, \\ u_{|t=0} = u_{t|t=0} &= 0. \end{aligned}$$

(*Sugerencia:* Usar el principio de Duhamel.) Después calcula la solución a

$$\begin{aligned} u_{tt} - \Delta_x u &= 0, \\ u_{|t=0} &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \\ u_{t|t=0} &= x^2 + y^2 + z^2, \end{aligned}$$

usando la fórmula de Kirchhoff y calculando las integrales de superficie. La suma de la solución particular y la solución de la homogénea debe ser, por unicidad, idéntica a la solución obtenida en el inciso (b). Verifica esto último.

7. Considera el siguiente problema de valores iniciales:

$$\begin{aligned} u_{tt} + \gamma u_t - c^2 \Delta u &= 0, \qquad & x \in \mathbb{R}^2,\ t > 0, \\ u(x, 0) &= 0, & x \in \mathbb{R}^2, \\ u_t(x, 0) &= g(x), \end{aligned}$$

donde $\gamma \in \mathbb{R}$ es constante y $g = g(x)$ es una función conocida.

(a) Encuentra el valor de $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $v(x, t) = e^{\alpha t} u(x, t)$ resuelve una ecuación sin derivadas de orden uno (pero posiblemente con derivadas de orden cero).

(b) Extiende la solución a $\mathbb{R}^3$ y encuentra $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $w(x_1, x_2, x_3, t) := w(x, x_3, t) = e^{\beta x_3} v(x, t)$ es solución de una ecuación diferencial con derivadas de orden dos, solamente, para $(x, x_3) \in \mathbb{R}^3$, $t > 0$.

(c) Encuentra la solución del problema original.

Total: 7 pts.