ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES

ECUACIONES COMPLETAMENTE NO LINEALES DE PRIMER ORDEN

(SECCIÓN 1)

23/02/2026

RAMÓN G. PLAZA

1. Ecuaciones completamente no lineales

Vamos a extender el método de características para resolver ecuaciones generales no lineales de la forma

$$F(x,y,u,u_x,u_y)=0, \tag{1}$$

para $u=u(x,y)\in\mathbb{R}$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Supondremos que $F:\mathbb{R}^5\to\mathbb{R}$ es una función suave (al menos de clase C^2) de sus argumentos:

$$F=F(x,y,u,p,q).$$

Para evitar casos triviales, supondremos también que

$$F_p^2+F_q^2\neq 0, \tag{2}$$

es decir, F_p y F_q no se anulan simultáneamente. Por ejemplo, en el caso cuasi-lineal,

$$F(x,y,u,p,q)=a(x,y,u)p+b(x,y,u)q-c(x,y,u)=0,$$

por lo que la condición (2) implica simplemente que a y b no son cero simultáneamente.

El problema de Cauchy asociado a la ecuación (1) requiere que u sea conocida sobre una curva inicial $\mathcal{I}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{I}&=\{(\tilde{x},\tilde{y})(\xi)\,:\,\xi\in I\},\\ u_{|\mathcal{I}}&=f(\xi),\end{aligned} \tag{3}$$

donde $\tilde{x},\tilde{y},f\in C^1(I;\mathbb{R})$ y $I\subseteq\mathbb{R}$ es un intervalo abierto, tal y como supusimos anteriormente.

Ejemplos importantes de ecuaciones completamente no lineales incluyen:

(a) La ecuación de la "eikonal" en óptica geométrica:

$$|\nabla u|^2=\frac{1}{c^2},$$

donde $\nabla u=(u_{x_1},\ldots,u_{x_n})^\top\in\mathbb{R}^n$, $c\neq 0$. Esta ecuación aproxima a frentes de onda (por ejemplo, ondas electromagnéticas) que se propagan con velocidad $c\neq 0$. La derivación y el análisis de esta ecuación se verán más adelante.

(b) La ecuación de Hamilton-Jacobi:

$$u_t+H(x,\nabla_x u)=0,$$

donde $u = u(x,t)$, $\nabla_x u = (u_{x_1}, \ldots, u_{x_n})^\top \in \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$. Aquí la función $H = H(x,p)$, con $x \in \mathbb{R}^n$, $p \in \mathbb{R}^n$ es el hamiltoniano en mecánica clásica, función usualmente no lineal.

1.1. Problema inverso: conos de Monge. Supongamos que $u = u(x,y)$ es una función de clase C^2 en $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, abierto y conexo, que contiene a la curva $\mathcal{I}$. Esta solución define una superficie,

$$\mathcal{S} = \{(x,y,u(x,y)) \,:\, (x,y) \in \Omega\} \subset \mathbb{R}^3.$$

De manera análoga al caso cuasi-lineal, la ecuación (1) es una relación para la normal a la superficie $\mathcal{S}$. Sin embargo, esta relación es más complicada que lo que aparenta a simple vista. La normal a la superficie $\mathcal{S}$ es

$$N = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ -1 \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} p \\ q \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Así, si $P_0 = (x_0, y_0, z_0) = (x_0, y_0, u(x_0, y_0))$ es un punto sobre la superficie $\mathcal{S}$ entonces el plano tangente en ese punto tiene como ecuación

$$p(x - x_0) + q(y - y_0) = z - z_0,$$

donde p y q satisfacen la relación

$$F(x_0, y_0, z_0, p, q) = 0.$$

De esta manera, observamos que la ecuación diferencial limita los posibles planos tangentes de una superficie integral (es decir, de la superficie determinada por una solución de la ecuación) en cada punto, a una familia uniparamétrica. En efecto, por la condición (2) supongamos que $F_q \neq 0$. Por el teorema de la función implícita la ecuación $F(x_0, y_0, z_0, p, q) = 0$ determina una función $q = q(p)$ en una vecindad del punto P_0, tal que

$$F(x_0, y_0, z_0, p, q(p)) = 0, \qquad \frac{dq}{dp} = -\frac{F_p}{F_q}.$$

En consecuencia, los posibles planos tangentes a la superficie en el punto P_0 forman una familia uniparamétrica, definida por

$$p(x - x_0) + q(p)(y - y_0) = z - z_0, \qquad p \in \mathbb{R}.$$

En general, ya que la función $q = q(p)$ puede ser no lineal, esta familia de planos genera un cono con vértice P_0, que se conoce como *cono de Monge*. Cada posible plano tangente toca al cono de Monge en un posible "generador" de la superficie. Ver Figura 1 (a).

Buscamos curvas características en el plano tangente; a esta curva le llamamos generador del cono de Monge. Una solución $u = u(x,y)$ que genera a la superficie $\mathcal{S}$ y que pasa por P_0 toca al cono de Monge en el vértice P_0. Por ejemplo, si la ecuación es cuasi-lineal, entonces el cono de Monge degenera en la línea recta que pasa por P_0 en dirección $(a_0, b_0, c_0)^\top = (a,b,c)(P_0)^\top$. En efecto, si $F_q \neq 0$ entonces en el caso cuasi-lineal $b \neq 0$. La solución $q = q(p)$ a la ecuación

$$F(x_0, y_0, z_0, p, q) = a_0 p + b_0 q - c_0 = 0,$$

es lineal en p, $q(p) = b_0^{-1}(c_0 - a_0 p)$. Sustituyendo notamos que la familia de planos, a saber,

$$p(x - x_0) + b_0^{-1}(c_0 - a_0 p)(y - y_0) = z - z_0,$$

parametrizada por $p \in \mathbb{R}$ tiene como intersección la línea recta

$$\begin{cases} x - x_0 = b_0^{-1} a_0 (y - y_0), \\ z - z_0 = b_0^{-1} c_0 (y - y_0), \end{cases}$$

es decir, la línea recta que pasa por P_0 en dirección $(a_0, b_0, c_0)^\top$.

Análogamente al caso cuasi-lineal, vamos a encontrar el sistema característico asociado. Suponiendo que $u = u(x,y)$ es una solución de clase C^2 derivamos la ecuación (1) con respecto a x y a y. El resultado es,

$$\begin{aligned} F_x + F_u u_x + F_p u_{xx} + F_q u_{yx} &= 0, \\ F_y + F_u u_y + F_p u_{xy} + F_q u_{yy} &= 0. \end{aligned}$$

Dado que u es de clase C^2 en un dominio conexo, $u_{xy} = u_{yx}$. Por lo tanto denotando $u_x = p$ y $u_y = q$ podemos desacoplar el sistema en ecuaciones para p y para q:

$$\begin{aligned} F_x + F_u p + F_p p_x + F_q p_y &= 0, \\ F_y + F_u q + F_p q_x + F_q q_y &= 0. \end{aligned}$$

Aplicando lo estudiado en el problema inverso para ecuaciones cuasi-lineales, reconocemos que la solución para $p = u_x$ en la primera ecuación está asociada al siguiente sistema característico,

$$\begin{aligned} \frac{d\check{x}}{d\eta} &= F_p, & \check{x}(0) &= \tilde{x}(\xi), \\ \frac{d\check{y}}{d\eta} &= F_q, & \check{y}(0) &= \tilde{y}(\xi), \\ \frac{d\check{p}}{d\eta} &= -(\check{p} F_u + F_x), & \check{p}(0) &= \tilde{p}(\xi), \end{aligned}$$

para cada $\xi \in I$, y donde F_p, F_q, F_x y F_u están evaluadas en $(\check{x}, \check{y}, u(\check{x}, \check{y}), \check{p}, u_y(\check{x}, \check{y}))$. El valor de $\tilde{p}(\xi)$ *no está determinado*. Análogamente, la solución $q = u_y$ de la segunda ecuación está determinada por la solución al sistema,

$$\begin{aligned} \frac{d\check{x}}{d\eta} &= F_p, & \check{x}(0) &= \tilde{x}(\xi), \\ \frac{d\check{y}}{d\eta} &= F_q, & \check{y}(0) &= \tilde{y}(\xi), \\ \frac{d\check{q}}{d\eta} &= -(\check{q} F_u + F_y), & \check{q}(0) &= \tilde{q}(\xi), \end{aligned}$$

para cada $\xi \in I$, y donde ahora las derivadas F_p, F_q, F_y y F_u están evaluadas en $(\check{x}, \check{y}, u(\check{x}, \check{y}), u_y(\check{x}, \check{y}), \check{q})$. Tampoco conocemos el valor inicial $\check{q}(0) = \tilde{q}(\xi)$.

Análogamente al caso cuasi-lineal, en el problema directo asociaremos al problema de Cauchy un sistema característico que consiste en resolver los sistemas para p y q simultáneamente. Para ello, es necesario determinar los valores $\tilde{p}(\xi)$ y $\tilde{q}(\xi)$ para todo $\xi \in I$. En el problema inverso, al suponer que existe una solución, sabemos que la superficie $\mathcal{S}$ contiene a la curva de datos $\mathcal{I}'$. Por lo tanto, para cada $\xi \in I$, el vector tangente τ a la curva $\mathcal{I}'$ es perpendicular al vector normal a la superficie $N = (\tilde{p}(\xi), \tilde{q}(\xi), -1)^\top$, es decir,

$$\tau \cdot N = \tilde{p}(\xi) \tilde{x}'(\xi) + \tilde{q}(\xi) \tilde{y}'(\xi) - f'(\xi) = 0,$$

para cada $\xi \in I$. Además, dado que u es solución, se debe cumplir la ecuación diferencial sobre la curva $\mathcal{I}'$:

$$F(\tilde{x}(\xi), \tilde{y}(\xi), f(\xi), \tilde{p}(\xi), \tilde{q}(\xi)) = 0.$$

De esta manera obtenemos un sistema de ecuaciones para $\tilde{p}(\xi)$ y $\tilde{q}(\xi)$:

$$\begin{aligned} G(p,q) &:= p\tilde{x}'(\xi) + q\tilde{y}'(\xi) - f'(\xi) = 0, \\ H(p,q) &:= F(\tilde{x}(\xi), \tilde{y}(\xi), f(\xi), p, q) = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Para cada $\xi \in I$, $(\tilde{p}, \tilde{q})(\xi)$ debe ser solución del sistema (4). Geométricamente, esto significa que debemos determinar la dirección del plano tangente sobre las curvas características. Observamos también que el sistema (4) es usualmente no lineal y que puede tener más de una solución. Una condición suficiente para la existencia de una solución es que

$$\det \begin{pmatrix} G_p & G_q \\ H_p & H_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{x}'(\xi) & F_p \\ \tilde{y}'(\xi) & F_q \end{pmatrix} \neq 0, \qquad \xi \in I.$$

Esta condición es equivalente a la condición de transversalidad en el caso cuasi-lineal.

Por lo tanto, suponiendo que para todo $\xi \in I$ existe una solución $(\tilde{p}, \tilde{q})(\xi)$ al sistema (4), consideramos el siguiente sistema característico:

$$\begin{aligned} \frac{d\check{x}}{d\eta} &= F_p, & \check{x}(0) &= \tilde{x}(\xi), \\ \frac{d\check{y}}{d\eta} &= F_q, & \check{y}(0) &= \tilde{y}(\xi), \\ \frac{d\check{p}}{d\eta} &= -(\check{p}F_u + F_x), & \check{p}(0) &= \tilde{p}(\xi), \\ \frac{d\check{q}}{d\eta} &= -(\check{q}F_u + F_y), & \check{q}(0) &= \tilde{q}(\xi), \end{aligned}$$

donde las derivadas de F están evaluadas en $(\check{x}, \check{y}, u(\check{x}, \check{y}), \check{p}, \check{q})$. Por el teorema de Picard existe una única solución de clase C^1 en una vecindad de $\eta = 0$ (la solución es única para cada $(\tilde{p}, \tilde{q})(\xi)$ solución de (4), la cual puede no ser única). Además, si definimos $\check{u}(\eta) := u(\check{x}(\eta), \check{y}(\eta))$ entonces

$$\begin{aligned} &\frac{d\check{u}}{d\eta} = u_x \frac{d\check{x}}{d\eta} + u_y \frac{d\check{y}}{d\eta} = \check{p}F_p + \check{q}F_q, \\ &\check{u}(0) = f(\xi). \end{aligned}$$

De esta manera obtenemos la última ecuación característica a considerar en el problema directo.

1.2. Problema directo: banda característica. Buscamos curvas que inician en la curva de datos $\mathcal{I}'$, soluciones del sistema

$$\begin{aligned}
\frac{d\check{x}}{d\eta} &= F_p, & \check{x}(0) &= \tilde{x}(\xi),\\
\frac{d\check{y}}{d\eta} &= F_q, & \check{y}(0) &= \tilde{y}(\xi),\\
\frac{d\check{p}}{d\eta} &= -(\check{p}F_u + F_x), & \check{p}(0) &= \tilde{p}(\xi),\\
\frac{d\check{q}}{d\eta} &= -(\check{q}F_u + F_y), & \check{q}(0) &= \tilde{q}(\xi),\\
\frac{d\check{u}}{d\eta} &= \check{p}F_p + \check{q}F_q, & \check{u}(0) &= f(\xi),
\end{aligned} \tag{5}$$

para cada $\xi \in I$, donde las derivadas de F están evaluadas en $(\check{x}, \check{y}, \check{u}, \check{p}, \check{q})$. Aquí suponemos que existe (al menos) una solución $(\tilde{p}, \tilde{q})(\xi)$ del sistema (4).

La solución al sistema característico (5) se denomina *banda característica*, en virtud de que ahora se reemplaza la curva característica en el caso cuasi-lineal en dirección $(a, b, c)^\top$ por una estructura geométrica más complicada: en cada punto es necesario determinar la dirección del plano tangente, dada por $(\tilde{p}, \tilde{q}, -1)^\top$ (figura 1).

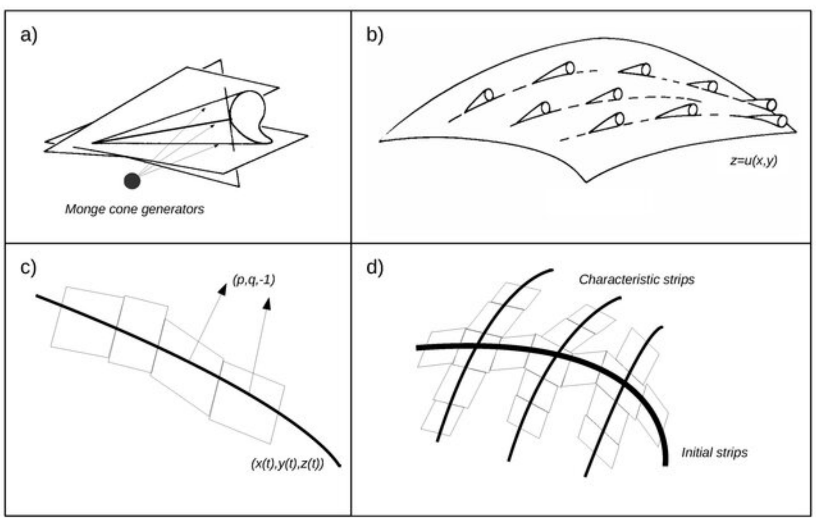

FIGURA 1. Banda característica: en cada punto de la curva es necesario determinar la dirección del plano tangente, dada por $(\tilde{p}, \tilde{q}, -1)^\top$.

Para garantizar que el sistema característico (5) está bien planteado es necesario precisar la siguiente

Definición 1.1. Sea $\xi_0 \in I$ y sea $P_0 \in \mathbb{R}^5$ el punto

$$P_0 = (\tilde{x}(\xi_0), \tilde{y}(\xi_0), f(\xi_0), \tilde{p}(\xi_0), \tilde{q}(\xi_0)) =: (x_0, y_0, z_0, p_0, q_0).$$

Se dice que P_0 satisface la *condición de transversalidad generalizada* si el par $(p_0, q_0) = (\tilde{p}(\xi_0), \tilde{q}(\xi_0))$ es solución del sistema

$$\begin{aligned} G(p_0, q_0) &= p_0 \tilde{x}'(\xi_0) + q_0 \tilde{y}'(\xi_0) - f'(\xi_0) = 0, \\ H(p_0, q_0) &= F(\tilde{x}(\xi_0), \tilde{y}(\xi_0), f(\xi_0), p_0, q_0) = 0, \end{aligned} \tag{6}$$

y además

$$\det \begin{pmatrix} \tilde{x}'(\xi_0) & F_p(P_0) \\ \tilde{y}'(\xi_0) & F_q(P_0) \end{pmatrix} \neq 0. \tag{7}$$

Podemos enunciar ahora el teorema de existencia local de soluciones de clase C^1 para ecuaciones completamente no lineales.

Teorema 1.2. *Sea $F = F(x, y, u, p, q)$ de clase C^2 tal que $F_p^2 + F_q^2 \neq 0$. Supongamos que $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ y f son de clase C^1 en $\xi \in I \subseteq \mathbb{R}$. Si para todo $\xi \in I$ el punto $P_0 = (\tilde{x}, \tilde{y}, f, \tilde{p}, \tilde{q})(\xi)$ satisface la condición de transversalidad generalizada, es decir, existe una solución $(\tilde{p}, \tilde{q})(\xi)$ al sistema*

$$\begin{aligned} &\tilde{p}\tilde{x}'(\xi) + \tilde{q}\tilde{y}'(\xi) - f'(\xi) = 0, \\ &F(\tilde{x}(\xi), \tilde{y}(\xi), f(\xi), \tilde{p}, \tilde{q}) = 0, \end{aligned}$$

y además se cumple que

$$\det \begin{pmatrix} \tilde{x}'(\xi) & F_p(P_0) \\ \tilde{y}'(\xi) & F_q(P_0) \end{pmatrix} \neq 0.$$

entonces existe una solución al problema de Cauchy (1) - (3), de clase C^1, en una vecindad de la curva $\mathcal{I}'$, la cual está determinada paramétricamente por la solución al sistema (5) para cada $\xi \in I$.

Demostración. Por las hipótesis del teorema: para cada $\xi \in I$ es posible encontrar un par $(\tilde{p}, \tilde{q})(\xi)$, solución de (7) y (4). De este modo, podemos plantear el sistema (5). Dado que F es de clase C^2 y $F_p^2 + F_q^2 \neq 0$, por el teorema de Picard concluímos que, para cada $\xi \in I$ fijo, el sistema (5) tiene una única solución en una vecindad de $\eta = 0$. Si variamos $\xi \in I$ obtenemos una banda característica que denotamos mediante

$$\bar{P}(\eta, \xi) = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{u}, \bar{p}, \bar{q})(\eta, \xi)^\top, \qquad (\eta, \xi) \in (-\delta, \delta) \times I,$$

y que satisface

- $\bar{P}(0, \xi) = (\tilde{x}, \tilde{y}, f, \tilde{p}, \tilde{q})(\xi)^\top$,
- $(\partial/\partial\eta)\bar{P} = (F_p, F_q, \bar{p}F_p + \bar{q}F_q, -F_x - \bar{p}F_u, -F_y - \bar{q}F_u)^\top$.

Notamos que en $\eta = 0$, $F(\bar{P}(0, \xi)) = F(\tilde{x}, \tilde{y}, f, \tilde{p}, \tilde{q})_{|\xi \in I} = 0$, ya que $(\tilde{p}, \tilde{q})$ es solución de (4). Mas aún, para cada $\xi \in I$ fijo,

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \eta} &= F_x \bar{x}_\eta + F_y \bar{y}_\eta + F_u \bar{u}_\eta + F_p \bar{p}_\eta + F_q \bar{q}_\eta \\ &= F_x F_p + F_y F_q + F_u(\bar{p}F_p + \bar{q}F_q) - F_p(F_x + \bar{p}F_u) - F_q(F_y + \bar{q}F_u) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Esto implica que F es constante sobre la banda característica, y por ende

$$\frac{\partial F}{\partial \eta} = \frac{\partial F}{\partial \xi} = 0.$$

Finalmente, por la condición inicial, $F \equiv 0$ sobre la banda característica.

Para cada $(\eta, \xi) \in (-\delta, \delta) \times I$, definimos

$$Z(\eta, \xi) := \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{u} \end{pmatrix} (\eta, \xi).$$

El mapeo define una superficie bien parametrizada si

$$Z_\eta \times Z_\xi = \begin{pmatrix} * \\ * \\ \bar{x}_\xi \bar{y}_\eta - \bar{y}_\xi \bar{x}_\eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ * \\ \bar{x}_\xi F_q - \bar{y}_\xi F_p \end{pmatrix} \neq 0.$$

Dado que en $\eta = 0$ se cumple la condición (7), podemos afirmar que, en una vecindad (tal vez más pequeña) de $\eta = 0$,

$$\Delta = \bar{x}_\xi \bar{y}_\eta - \bar{y}_\xi \bar{x}_\eta = \bar{x}_\xi F_q - \bar{y}_\xi F_p \neq 0.$$

Esto implica que el mapeo $(\eta, \xi) \mapsto (\bar{x}, \bar{y})(\eta, \xi)$ es invertible en una vecindad $(\eta, \xi) \in (-\delta, \delta) \times I$. Sea $\mathcal{O} = (\bar{x}, \bar{y})((-\delta, \delta) \times I) \subset \mathbb{R}^2$. Por el teorema de la función inversa existe un mapeo $(\bar{\eta}, \bar{\xi}) : \mathcal{O} \to (-\delta, \delta) \times I$ tal que $(\bar{\eta}, \bar{\xi})(x, y)$ es el mapeo inverso de $(\bar{x}, \bar{y})(\eta, \xi)$. Por el teorema de la función inversa y la regla de la cadena tenemos que

$$\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\eta}_x & \bar{\xi}_x \\ \bar{\eta}_y & \bar{\xi}_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{u}_\eta \\ \bar{u}_\xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x}_\eta & \bar{y}_\eta \\ \bar{x}_\xi & \bar{y}_\xi \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \bar{u}_\eta \\ \bar{u}_\xi \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} \bar{y}_\xi & -\bar{y}_\eta \\ -\bar{x}_\xi & \bar{x}_\eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{u}_\eta \\ \bar{u}_\xi \end{pmatrix}.$$

Sustituyendo $\bar{u}_\eta = \bar{p} F_p + \bar{q} F_q$, $\bar{x}_\eta = F_p$ y $\bar{y}_\eta = F_q$ obtenemos

$$\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} \bar{y}_\xi (\bar{p} F_p + \bar{q} F_q) - \bar{u}_\xi F_q \\ -\bar{x}_\xi (\bar{p} F_p + \bar{q} F_q) + \bar{u}_\xi F_p \end{pmatrix}.$$

De este modo,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_x - \bar{p} \\ u_y - \bar{q} \end{pmatrix} &= \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} \bar{y}_\xi (\bar{p} F_p + \bar{q} F_q) - \bar{u}_\xi F_q - \bar{p}(F_p \bar{y}_\xi - F_q \bar{x}_\xi) \\ -\bar{x}_\xi (\bar{p} F_p + \bar{q} F_q) + \bar{u}_\xi F_p - \bar{q}(F_p \bar{y}_\xi - F_q \bar{x}_\xi) \end{pmatrix} \\ &= \frac{(\bar{p} \bar{x}_\xi + \bar{q} \bar{y}_\xi - \bar{u}_\xi)}{\Delta} \begin{pmatrix} F_q \\ -F_p \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Definimos

$$A(\eta, \xi) := \bar{p} \bar{x}_\xi + \bar{q} \bar{y}_\xi - \bar{u}_\xi,$$

en la vecindad. Claramente $A(0, \xi) = \tilde{p} \tilde{x}'(\xi) + \tilde{q} \tilde{y}'(\xi) - f'(\xi) = 0$. Por lo tanto, para cada $\xi \in I$ fijo, sea $\hat{A}(\eta) := A(\eta, \xi)$, con condición inicial $\hat{A}(0) = 0$. Derivando obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{A}}{d\eta} &= \bar{p}_\eta \bar{x}_\xi + \bar{p} \bar{x}_{\eta\xi} + \bar{q}_\eta \bar{y}_\xi + \bar{q} \bar{y}_{\eta\xi} - \bar{u}_{\eta\xi} \\ &= -(F_x + \bar{p} F_u) \bar{x}_\xi + \bar{p} \partial_\xi F_p - (F_y + \bar{q} F_u) \bar{y}_\xi + \bar{q} \partial_\xi F_q - \partial_\xi (\bar{p} F_p + \bar{q} F_q) \\ &= -\big(F_x \bar{x}_\xi + F_y \bar{y}_\xi + F_u \bar{u}_\xi + F_p \bar{p}_\xi + F_q \bar{q}_\xi\big) - F_u \big(\bar{p} \bar{x}_\xi + \bar{q} \bar{y}_\xi - \bar{u}_\xi\big) \\ &= -\underbrace{\partial_\xi F}_{=0} - F_u \hat{A}. \end{aligned}$$

Así, tenemos la ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{d\hat{A}}{d\eta} = -F_u \hat{A}, \qquad \hat{A}(0) = 0,$$

cuya solución es $\hat{A}(\eta) = \hat{A}(0) \exp\big(-\int_0^\eta F_u(s)\,ds + \psi(\xi)\big) \equiv 0$. Por lo tanto

$$A(\eta, \xi) = 0,$$

en la vecindad $(\eta, \xi) \in (-\delta, \delta) \times I$. Esto implica que

$$u_x = \bar{p}, \qquad u_y = \bar{q},$$

en la vecindad y sobre la banda característica. Por lo tanto, si definimos para cada $(x, y) \in \mathcal{O}$,

$$u(x, y) := \bar{u}(\bar{\eta}(x, y), \bar{\xi}(x, y)),$$

entonces se tiene que:

- Para cada $(x, y) \in \mathcal{O}$,
  $$F(x, y, u(x, y), u_x, u_y) = F(\bar{x}(\bar{\eta}(x, y), \bar{\xi}(x, y)), \bar{y}(\cdot), \bar{u}(\cdot), \bar{p}(\cdot), \bar{q}(\cdot)) \equiv 0,$$
  donde $(\cdot) = (\bar{\eta}(x, y), \bar{\xi}(x, y))$.
- Para cada $\xi \in I$,
  $$u(\tilde{x}(\xi), \tilde{y}(\xi)) = \bar{u}(\bar{\eta}(\tilde{x}(\xi), \tilde{y}(\xi)), \bar{\xi}(\tilde{x}(\xi), \tilde{y}(\xi))) = \bar{u}(0, \xi) = f(\xi),$$
  ya que, por ser mapeos inversos, $(\bar{x}, \bar{y})(0, \xi) = (\tilde{x}(\xi), \tilde{y}(\xi))$ implica que
  $$(\bar{\eta}(\tilde{x}(\xi), \tilde{y}(\xi)), \bar{\xi}(\tilde{x}(\xi), \tilde{y}(\xi)) = (0, \xi).$$

Por lo tanto en la vecindad $\mathcal{O}$, la función $u = u(x, y)$ es de clase C^1, es solución al problema de Cauchy (1) y (3), y la gráfica de la solución existe en una vecindad de la curva $\mathcal{I}'$. El teorema está demostrado. $\square$

Hacemos notar que el enunciado del teorema 1.2 no afirma que la solución sea única, ya que puede existir más de una solución al sistema (4) tal y como se puede apreciar en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.3. Consideremos la ecuación

$$u = u_x^2 - 3u_y^2,$$

con datos de Cauchy

$$u(x, 0) = x^2, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Consistentemente con nuestra notación tenemos que,

$$F(x, y, u, p, q) = p^2 - 3q^2 - u,$$

y la curva de datos es $\mathcal{I} = \{(\tilde{x}, \tilde{y}, f)(\xi) = (\xi, 0, \xi^2) \,:\, \xi \in \mathbb{R}\}$. Claramente, $F_x = F_y = 0$, $F_u = -1$, $F_p = 2p$ y $F_q = -6q$. Por lo tanto, para cada $\xi \in I$ el sistema característico asociado a este problema es

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{d\eta} &= 2p, & x(0) &= \xi, \\
\frac{dy}{d\eta} &= -6q, & y(0) &= 0, \\
\frac{du}{d\eta} &= 2p^2 - 6q^2, & u(0) &= \xi^2, \\
\frac{dp}{d\eta} &= p, & p(0) &= p_0, \\
\frac{dq}{d\eta} &= q, & q(0) &= q_0,
\end{aligned}$$

donde $(p_0, q_0) = (p_0, q_0)(\xi)$ es solución del sistema

$$\begin{aligned} p^2 - 3q^2 - \xi^2 &= 0, \\ p - 2\xi &= 0. \end{aligned}$$

Este último tiene *dos* soluciones: $(p_0, q_0)(\xi) = (2\xi, \pm\xi)$. Escogiendo $(p_0, q_0)(\xi) = (2\xi, +\xi)$ resolvemos el sistema para p y q. El resultado es $p = 2\xi e^\eta$ y $q = \xi e^\eta$. Sustituyendo en las ecuaciones para x y y obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\eta} &= 4\xi e^\eta, \qquad & x(0) = \xi, \\ \frac{dy}{d\eta} &= -6\xi e^\eta, \qquad & y(0) = 0, \end{aligned}$$

cuya solución es

$$x = 4\xi(e^\eta - 1) + \xi, \qquad y = -6\xi(e^\eta - 1).$$

Finalmente, sustituyendo en la ecuación para u,

$$\frac{du}{d\eta} = 2\xi^2 e^{2\eta}, \qquad u(0) = \xi^2,$$

con lo cual obtenemos $u = \xi^2 e^{2\eta}$. Dado que $x + \frac{1}{2}y = \xi e^\eta$, encontramos una posible solución,

$$u(x, y) = \big(\xi e^\eta\big)^2 = \big(x + \tfrac{1}{2}y\big)^2.$$

El lector podrá verificar que si escogemos $(p_0, q_0)(\xi) = (2\xi, -\xi)$ entonces la solución que se obtiene es

$$u(x, y) = \big(x - \tfrac{1}{2}y\big)^2.$$

Ambas funciones son de clase C^1 y son soluciones del problema de Cauchy. La pérdida de unicidad se debe a que existe más de una solución al sistema (4).

Ejemplo 1.4. Consideremos el siguiente problema de Cauchy,

$$\begin{aligned} u_x^2 + u_y^2 &= 4u, \\ u(x, -1) &= x^2, \qquad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

De acuerdo con nuestra notación, $F = p^2 + q^2 - 4u$, por lo que $F_x = F_y = 0$, $F_u = -4$, $F_p = 2p$ y $F_q = 2q$. La curva inicial $\mathcal{I}$ está parametrizada por $\tilde{x}(\xi) = \xi$, $\tilde{y}(\xi) = -1$, con dato inicial $u_{|\mathcal{I}} = f(\xi) = \xi^2$. Por lo tanto el sistema (4) se escribe como

$$\begin{aligned} p^2 + q^2 - 4\xi^2 &= 0, \\ p - 2\xi &= 0, \end{aligned}$$

el cual tiene una solución única $\tilde{p} = 2\xi$, $\tilde{q} = 0$. Así, el sistema característico asociado al problema de Cauchy es

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{d\eta} &= 2p, & x(0) &= \xi,\\
\frac{dy}{d\eta} &= 2q, & y(0) &= 0,\\
\frac{du}{d\eta} &= 2(p^2+q^2), & u(0) &= \xi^2,\\
\frac{dp}{d\eta} &= 4p, & p(0) &= 2\xi,\\
\frac{dq}{d\eta} &= 4q, & q(0) &= 0,
\end{aligned}$$

para cada $\xi \in \mathbb{R}$. Resolviendo las dos últimas ecuaciones obtenemos $q(\eta) \equiv 0$, $p(\eta) = 2\xi e^{4\eta}$. Sustituyendo en las dos primeras y resolviendo se tiene que $x(\eta) = \xi e^{4\eta}$ y que $y(\eta) \equiv -1$.

Finalmente, sustituyendo p y q en la ecuación para u y resolviendo obtenemos $u(\eta) = \xi^2 e^{8\eta} = (\xi e^{4\eta})^2 = x^2$. Por lo tanto la función

$$u(x,y) = x^2,$$

es claramente una solución de clase C^1 al problema de Cauchy. Existen, sin embargo, más soluciones de clase C^1. Por ejemplo,

$$u(x,y) = x^2 + (y+1)^2,$$

también es solución del mismo problema. En este caso la pérdida de unicidad se debe a que la condición de transversalidad no se cumple:

$$\det \begin{pmatrix} e^{4\eta} & 4\xi e^{4\eta} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0,$$

y de que los vectores

$$\begin{pmatrix} 4\xi e^{4\eta} \\ 0 \\ 8\xi^2 e^{8\eta} \end{pmatrix}_{|\eta=0} = \begin{pmatrix} 4\xi \\ 0 \\ 8\xi^2 \end{pmatrix} \quad y \qquad \begin{pmatrix} \xi \\ 0 \\ 2\xi^2 \end{pmatrix}$$

son colineales para todo $\xi \in \mathbb{R}$.

Instituto de Investigaciones en Matemáticas Aplicadas y en Sistemas, Universidad Nacional Autónoma de México, Circuito Escolar s/n, C.P. 04510 Cd. de México (México)

Email address: plaza@mym.iimas.unam.mx