Ecuaciones Diferenciales Parciales

Semestre 2024-1

Segundo examen parcial

Instrucciones:

- Favor de no poner más de un problema por hoja y escribir su nombre en cada hoja.
- Enviar las respuestas a más tardar el **miércoles 6 de diciembre** (puede ser en formato PDF y por correo electrónico).

1. (1 punto) Suponiendo que $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$ es solución de la ecuación del calor, $u_t - \Delta u = 0$, en $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$, probar que:

(a) La familia de funciones $u_\lambda(x,t) := u(\lambda x, \lambda^2 t)$ para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, también es solución de la ecuación del calor.

(b) La función $v(x,t) := x \cdot \nabla u + 2tu_t$ también es solución de la ecuación del calor. (*Sugerencia:* Usar el inciso (a)).

2. (1 punto) Sea

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Demuestra que la solución al problema de Cauchy,

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0, & x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(x,0) &= g(x), & x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

está dada por

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(1 + \phi(x/\sqrt{4t}\,)\right),$$

donde

$$\phi(s) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^s e^{-t^2}\, dt.$$

La función ϕ se conoce como la *función de error.*

3. (2 puntos) Considera el siguiente problema de Cauchy para la ecuación de Burgers viscosa:

$$\begin{aligned} v_t + vv_x &= v_{xx}, & x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ v(x,0) &= g(x), & x \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{1}$$

donde $g \in C_0^2(\mathbb{R})$ es una función con soporte compacto. Encuentra una solución a este problema siguiendo los siguientes pasos:

(a) Suponiendo que $v \in C^{2,1}(\mathbb{R} \times (0,\infty)) \cap C(\mathbb{R} \times [0,\infty))$ es solución de la ecuación de Burgers viscosa (1), considera

$$V(x,t) := \int_0^x v(y,t)\, dy.$$

Demuestra que V es solución de la ecuación

$$V_t + \tfrac{1}{2}V_x^2 = V_{xx} + c(t),$$

donde $c = c(t)$ es una constante de integración que depende de t.

(b) Demuestra que $U(x,t) := V(x,t) - \int_0^t c(s)\,ds$ satisface la ecuación

$$U_t + \tfrac{1}{2}U_x^2 = U_{xx},$$

y considera

$$w(x,t) := \exp\left(-\tfrac{1}{2}U(x,t)\right). \tag{2}$$

Prueba que w es solución de la ecuación del calor.

(c) Encuentra la condición inicial apropiada para w y resuelve el problema global de Cauchy para w. Encuentra una solución para (1) aplicando la transfomación inversa.

Nota: El cambio de variables (2) es notable, pues reduce un problema no lineal a una ecuación lineal y se conoce como *transformación de Hopf-Cole*.

4. (1 punto) Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, abierto, acotado, con frontera suave. Sea $u \in C^1(\overline{\Omega} \times (0,T))$, con $T > 0$, solución de

$$u_t - \Delta u = 0, \qquad \text{en } \Omega \times (0,T),$$

que además satisface las condiciones de frontera:

- $u = 0$ en $\Gamma_1 \subset \partial\Omega$ para todo $t \in (0,T)$; y,
- $\partial u/\partial n = 0$ en $\Gamma_2 \subset \partial\Omega$ para todo $t \in (0,T)$,

donde $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. (Éste es un problema *mixto*: con condiciones de Dirichlet y Neumann en porciones de la frontera.) Demuestra que

$$\rho(t) = \|u(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)} := \int_\Omega u(x,t)^2\,dx,$$

es una función no creciente de $t \in (0,T)$. (*Sugerencia:* Aplica el método de energía.)

5. (2 puntos) Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio abierto, acotado con frontera suave. Sea $f \in C(\overline{\Omega})$. Suponiendo que $u \in C^{2,1}(\Omega \times (0,\infty)) \cap C(\overline{\Omega} \times [0,\infty))$ es solución de

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= 0, && \text{en } \Omega \times (0,\infty),\\ u(x,0) &= f(x), && x \in \Omega,\\ u &= 0, && \text{sobre } \partial\Omega \times (0,\infty), \end{aligned}$$

demuestra que

$$\sup_\Omega |u(\cdot,t)| \leq Ce^{-\mu t} \sup_\Omega |f|,$$

para cualquier $t > 0$, donde C y μ son constantes positivas que dependen únicamente de n y de Ω.

6. (2 puntos) Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, abierto y acotado, y $T > 0$ fijo, arbitrario. Se define $\Omega_T := \Omega \times (0,T]$ y sea $C^{2,1}(\Omega_T)$ el espacio de funciones con dos derivadas continuas en la variable x y una derivada continua en la variable t, con $(x,t) \in \Omega_T$. Sea $c = c(x,t)$ una función continua en $\overline{\Omega_T}$ tal que $c \geq -c_0$, con $c_0 \geq 0$, constante. Finalmente, sea $u_0 \in C(\overline{\Omega})$ con $u_0 \geq 0$. Suponiendo que $u \in C^{2,1}(\Omega_T) \cap C(\overline{\Omega_T})$ es solución de

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u + cu &= -u^2, && \text{en } \Omega_T,\\ u(\cdot,0) &= u_0, && \text{en } \Omega \times \{t=0\},\\ u &= 0, && \text{sobre } \partial\Omega \times (0,T), \end{aligned}$$

demuestra que

$$0 \leq u \leq e^{c_0 T} \sup_{x\in\Omega} u_0(x), \quad \text{en } \Omega_T.$$

Sugerencia: Considera la función $v = e^{-c_0 t}u$.

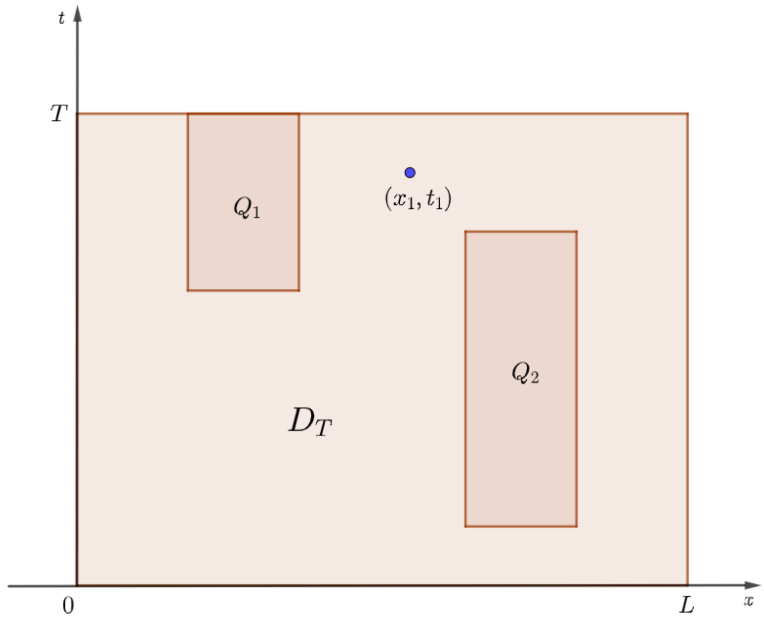

Figura 1: Dominio plano $D_T = Q_T \setminus \left(\overline{Q_1} \cup \overline{Q_2} \right)$, $Q_T = (0, L) \times (0, T)$.

7. (1 punto) Suponga que $u \in C^{2,1}(D_T) \cap C(\overline{D_T})$, $u = u(x,t)$, es una solución de la ecuación del calor $u_t - u_{xx} = 0$ en el dominio plano $D_T = Q_T \setminus \left(\overline{Q_1} \cup \overline{Q_2} \right)$, $Q_T = (0, L) \times (0, T)$, donde los rectángulos Q_1 y Q_2 se aprecian en la Figura 1. Suponiendo que u alcanza su valor máximo

$$M := \max_{\overline{D_T}} u,$$

en el punto interior $(x_1, t_1) \in D_T$, ¿en qué otros puntos $(x, t) \in D_T$ se cumple que $u(x,t) \equiv M$? Explica tu respuesta.

Total: 10 pts.