ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES

CUERDA Y MEMBRANA ELÁSTICAS (SECCIÓN 2)

21/09/2023

RAMÓN G. PLAZA

1. Motivación

En esta sección vamos a derivar, a partir de principios físicos y haciendo aproximaciones apropiadas, la ecuación de onda en dos y tres dimensiones. Una función $u = u(x,t)$, con $x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $t > 0$, de clase $C^2(\Omega \times (0,\infty))$, se dice que es solución de la *ecuación de onda* si

$$u_{tt} - c^2 \Delta u = 0, \qquad x \in \Omega, \ t > 0, \tag{1}$$

donde $c > 0$ es una constante (velocidad de la onda), y $\Delta u = \sum_{j=1}^n \partial_{x_j}^2 u$ es el operador de Laplace. El dominio Ω es abierto; incluso puede ser todo el espacio $\mathbb{R}^n$. La ecuación (1) es una ecuación diferencial parcial lineal de segundo orden que modela fenómenos vibratorios o de propagación de perturbaciones. Cuando se conoce la densidad de fuerzas volumétricas, la ecuación de onda es no homogénea,

$$u_{tt} - c^2 \Delta u = h, \qquad x \in \Omega, \ t > 0, \tag{2}$$

donde $h = h(x,t)$ es una función conocida (forzamiento). Usualmente, la ecuación de onda está complementada con condiciones iniciales en $t = 0$ de la forma

$$u(x,0) = f(x), \qquad u_t(x,0) = g(x), \qquad x \in \Omega, \tag{3}$$

donde $f = f(x)$ y $g = g(x)$ son funciones conocidas. Si Ω es acotado, o no es todo el espacio, $\Omega \subsetneq \mathbb{R}^n$, podemos también especificar condiciones de frontera de tipo Dirichlet, Neumann o Robin,

$$\begin{aligned} u &= a, \qquad x \in \Gamma, t > 0, \\ \nabla u \cdot \hat{n} &= a, \qquad x \in \Gamma, t > 0, \\ \text{ó}, \quad u + \alpha \nabla u \cdot \hat{n} &= a, \qquad x \in \Gamma, t > 0, \end{aligned}$$

respectivamente, o combinaciones de las mismas, donde $\Gamma \subseteq \partial\Omega$ es un subconjunto de (o toda) la frontera, con normal exterior unitaria $\hat{n}$, $\alpha > 0$ es una constante, y $a = a(x,t)$ es una función conocida.

La idea general en mecánica de medios continuos es asociar a $u = u(x,t)$ con el desplazamiento elástico de un material en una dirección fija, en la posición $x \in \mathbb{R}^n$ a tiempo $t > 0$. El medio elástico puede ser una cuerda vibrante ($n = 1$), una membrana elástica ($n = 2$), o un sólido ($n = 3$). Sea $D \subset \Omega \subset \mathbb{R}^n$ un subdominio de la configuración de referencia, donde D es abierto, acotado, conexo con frontera suave ∂D. Si denotamos F como la densidad de fuerza neta aplicada en un elemento dS de ∂D, y si suponemos que el medio elástico es homogéneo con densidad constante $\rho(x,t) = \rho_0 > 0$, entonces por la segunda ley de Newton tenemos el siguiente balance de fuerzas:

$$\rho_0 \frac{d^2}{dt^2} \int_D u(x,t)\,dx = \rho_0 \int_D u_{tt}(x,t)\,dt = \underbrace{-\int_{\partial D} F(x,t)\cdot \hat{n}\,dS}_{=\text{suma de fuerzas sobre } \partial D} = -\int_D \operatorname{div}_x F(x,t)\,dx.$$

Como D es un subdominio arbitrario, la ecuación integral

$$\int_D \big(\rho_0 u_{tt} + \operatorname{div} F\big)(x,t)\,dx = 0,$$

implica, por el teorema de localización, la ecuación de campo

$$\rho_0 u_{tt} + \operatorname{div} F = 0.$$

para todo $x \in \Omega$, $t > 0$. En mecánica de medios continuos, uno aproxima la densidad de fuerzas superficiales proporcionalmente al gradiente de deformación,

$$F(x,t) \approx -k^2 \nabla u, \tag{4}$$

donde $k^2 > 0$ es una constante. Sustituyendo obtenemos la ecuación de onda (1) con $c^2 = k^2/\rho_0$.

A continuación vamos a hacer más preciso este argumento en el caso de una cuerda vibrante ($n = 1$) y de una membrana elástica ($n = 2$), justificando con detalle la aproximación (4). La derivación en una dimensión se puede consultar en el libro de Strauss [1]. La derivación en dos dimensiones es una generalización natural del caso unidimensional.

2. Cuerda vibrante ($n = 1$)

Consideremos una cuerda vibrante, hecha de un material elástico homogéneo y flexible, de longitud $L > 0$, cuya configuración de equilibrio (reposo) es el intervalo $x \in [0, L]$. Vamos a suponer que dicha cuerda experimenta pequeñas vibraciones transversales: pensemos, por ejemplo, en la cuerda de una guitarra, o en la cuerda de un violín durante un *pizzicato* realizado con los dedos. En un instante $t > 0$ la cuerda tiene una posición relativa a su configuración de equilibrio la cual, suponemos, permanece en un plano (ver figura 1). Denotamos $u = u(x,t)$ al desplazamiento vertical de la cuerda con respecto a su configuración de equilibrio, a tiempo $t > 0$ en la posición $x \in [0, L]$.

Figura 1. Cuerda vibrante unidimensional. La variable $u = u(x,t)$ mide el desplazamiento sobre la vertical a tiempo $t > 0$ en la posición $x \in [0, L]$.

Sea $\rho_0 > 0$ la densidad constante de la cuerda (masa por unidad de longitud), ya que estamos suponiendo que el material es homogéneo. Igualmente, vamos a suponer que la cuerda es perfectamente elástica, es decir, que no ofrece resistencia a la deformación. De este modo, la fuerza de tensión es tangencial a la cuerda, y cada punto material de la misma se desplaza sólo en la dirección vertical. Denotaremos $T = T(x,t) > 0$ a la magnitud de dicha fuerza de tensión en el punto x a tiempo $t > 0$. Finalmente, supondremos que no hay fuerzas debidas a la fricción (del aire, por ejemplo). Bajo estas suposiciones, vamos a escribir la segunda ley de Newton para la sección de la cuerda que se encuentra entre los puntos arbitrarios x y $x+\Delta x$ (véase la figura 2). La tangente de la cuerda en x es $u_x(x,t)$ y forma un ángulo $\theta_1 = \theta(x,t)$ con la horizontal. La tangente en $x+\Delta x$ es $u_x(x+\Delta x,t)$ y forma un ángulo $\theta_2 = \theta(x+\Delta x,t)$ con la horizontal. Si denotamos $h = h(x,t)$ a la densidad (por unidad de masa) de fuerzas externas en la dirección vertical, haciendo un balance de fuerzas obtenemos:

$$\underbrace{\frac{d^2}{dt^2}\int_x^{x+\Delta x} \rho_0 u(y,t)\,dy}_{\text{masa}\times\text{aceleración vertical}} = \underbrace{T(x+\Delta x)\sin\theta_2 - T(x,t)\sin\theta_1}_{\text{componente vertical de la tensión}} + \underbrace{\int_x^{x+\Delta x} \rho_0 h(y,t)\,dy}_{\text{fuerzas externas}}.$$

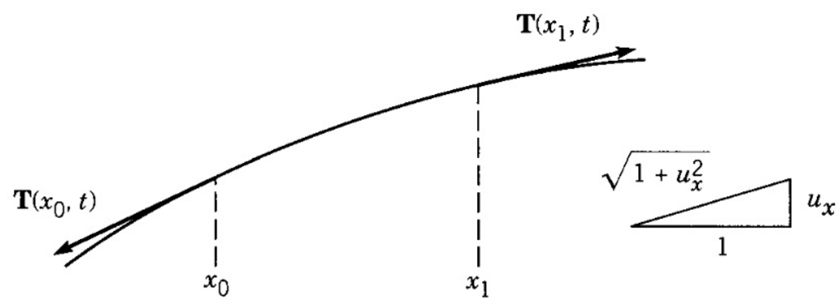

Figura 2. Balance de fuerzas entre los puntos x y $x+\Delta x$.

Dado que el desplazamiento es sólo en la dirección vertical, las componentes horizontales de las fuerzas de tensión están en balance. De este modo,

$$T(x+\Delta x,t)\cos\theta(x+\Delta x,t) - T(x,t)\cos\theta(x,t) = 0.$$

Dividiendo entre Δx y tomando el límite cuando $\Delta x \to 0$ obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial x}\big(T(x,t)\cos\theta(x,t)\big) = 0,$$

es decir,

$$T(x,t)\cos\theta(x,t) = T_0(t),$$

es una función sólo de $t > 0$. Como la cuerda es perfectamente elástica, podemos suponer que $T_0(t) \equiv T_0$ es constante para todo $t > 0$, en virtud de que la tensión horizontal es prácticamente la misma que la de la cuerda en reposo. La tensión en dirección vertical es, por ende,

$$T_{\text{vertical}}(x,t) = T(x,t)\sin\theta(x,t) = T_0\tan\theta(x,t) = T_0 u_x(x,t).$$

Esto implica que

$$T(x+\Delta x)\sin\theta_2 - T(x,t)\sin\theta_1 = T_0(u_x(x+\Delta x,t) - u_x(x,t)).$$

Observamos en este punto que la ecuación de balance de fuerzas de tensión en la dirección horizontal es equivalente a suponer que $T\sin\theta \approx T\tan\theta = Tu_x$, es decir, a la aproximación (4). Sustituyendo en la ecuación de balance de fuerzas obtenemos

$$\int_x^{x+\Delta x} \rho_0 u_{tt}(y,t)\,dy = T_0(u_x(x+\Delta x,t) - u_x(x,t)) + \int_x^{x+\Delta x} \rho_0 h(y,t)\,dy.$$

Dividiendo entre Δx y tomando el límite cuando $\Delta x \to 0$ se llega a la ecuación

$$\rho_0 u_{tt}(x,t) = T_0 u_{xx}(x,t) + \rho_0 h(x,t),$$

para cada punto $x \in [0,L]$ y todo tiempo $t > 0$. Denotando $c^2 = T_0/\rho_0 > 0$ obtenemos la ecuación de onda no homogénea en una dimensión espacial,

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = h, \qquad x \in [0,L],\, t > 0. \tag{5}$$

La ecuación diferencial debe ser complementada con condiciones iniciales de la forma

$$u(x,0) = f(x), \qquad u_t(x,0) = g(x), \qquad x \in [0,L], \tag{6}$$

que especifican la posición y la velocidad iniciales de la cuerda, respectivamente. Dependiendo del problema físico bajo consideración, se especifican también condiciones de frontera. En general, aparte de los datos de Cauchy en $t = 0$, para el caso de valores en la frontera en $x = 0$ y $x = L$ se pueden especificar los siguientes tipos de condiciones de frontera:

- *Tipo Dirichlet:* describen el desplazamiento de la cuerda en los extremos. Son de la forma:
$$u(0,t) = a(t), \qquad u(L,t) = b(t), \qquad t > 0,$$
donde a y b son funciones conocidas que satisfacen ciertas condiciones de compatibilidad con las condiciones iniciales.
- *Tipo Neumann:* especifican la tensión vertical en los extremos. Tienen la forma:
$$u_x(0,t) = a(t), \qquad u_x(L,t) = b(t), \qquad t > 0,$$
donde a y b son conocidas. (Nótese que la tensión vertical es $T_0 u_x$.)
- *Tipo Robin:* describen un acoplamiento elástico lineal en los extremos. Por ejemplo, se ata la cuerda a un resorte con respuesta lineal, cuyo extremo opuesto es fijo. Las condiciones toman la siguiente forma:
$$u_k(0,t) = k_1 u(0,t), \qquad u_x(L,t) = -k_2 u(L,t), \qquad t > 0,$$
donde $k_j > 0$ son constantes asociadas a la respuesta elástica de los resortes, $j = 1, 2$, y donde hemos aplicado la ley de Hooke (lineal).

Por ejemplo, si la cuerda vibrante está sujeta en ambos extremos, se pueden imponer condiciones de frontera de la forma

$$u(0,t) = u(L,t) = 0, \qquad t > 0,$$

las cuales indican que la cuerda esta fija en $x = 0$ y en $x = L$ y que su desplazamiento vertical es cero (cuerda sujeta a la horizontal). Las funciones f y g deben satisfacer la condición de compatibilidad $f(0) = f(L) = 0$, $g(0) = g(L) = 0$.

También podemos plantearnos el problema de una cuerda infinita sujeta de un sólo extremo que localizamos en $x = 0$. De este modo el problema con valores iniciales y de frontera toma la forma

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= h, && x \in [0, \infty),\ t > 0, \\ u(x,0) &= f(x), && x \in [0, \infty), \\ u_t(x,0) &= g(x), && \\ u(0,t) &= 0, && t > 0. \end{aligned}$$

La condición de compatibilidad en este caso es $f(0) = g(0) = 0$.

Finalmente, podemos plantear el *problema global de Cauchy*, que consiste en considerar una cuerda infinita, sin extremos, e imponer únicamente condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= h, && x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(x,0) &= f(x), && x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x,0) &= g(x). && \end{aligned}$$

Físicamente, el problema global de Cauchy no es realista. Sin embargo, es esencial para entender la teoría.

3. Membrana elástica ($n = 2$)

Vamos a derivar las ecuaciones que gobiernan vibraciones pequeñas de una membrana elástica, homogénea, que en reposo ocupa un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ en el plano, y que en la frontera de Ω está sujeta. Análogamente al caso de la cuerda vibrante, vamos a suponer que el material es perfectamente elástico, homogéneo, y que los desplazamientos horizontales son despreciables. Por lo tanto, cada elemento material de la membrana se mueve únicamente en dirección vertical. Pensemos, por ejemplo, en la piel de un tambor sujeta en el borde circular del mismo y perfectamente estirada, la cual vibra sólo verticalmente. Denotamos $u = u(x, y, t)$ al desplazamiento vertical de la membrana con respecto de su configuración de equilibrio $\{z = 0\}$, a tiempo $t > 0$ y en la posición $(x, y) \in \Omega$. Como el material es homogéneo, la densidad de masa (por unidad de área) es constante y la denotamos como $\rho_0 > 0$. Si suponemos que existe un potencial gravitacional entonces las fuerzas verticales se deben a la gravedad y a la componente vertical de la fuerza de tensión. Ésta última se entiende de la siguiente manera: sea una región de la membrana, delimitada por una curva cerrada C. El material elástico de un lado de C ejerce una fuerza por unidad de longitud $T(x, y, t)$ sobre C la cual es tangente a la membrana. Esto se debe a que la membrana es elástica y no ofrece resistencia a la deformación. Por lo tanto

$$T(x, y, t) = \tau(x, y, t)\hat{n}(x, y, t),$$

donde $\hat{n}$ es el vector unitario normal a C, tangente a la membrana, y τ es la magnitud de la fuerza de tensión. Suponer que el material es perfectamente elástico es equivalente a considerar τ constante: $\tau(x, y, t) \equiv T_0 > 0$. Finalmente, supondremos que la fricción es despreciable.

Consideremos un elemento de superficie de la membrana, el cual se puede aproximar mediante $dS \approx \Delta S = \Delta x \Delta y$, donde ΔS tiene un vértice en (x, y) y el vértice opuesto es $(x + \Delta x, y + \Delta y)$. Esta aproximación se puede hacer debido a que las vibraciones son esencialmente verticales, y por ende los ángulos de inclinación con respecto a la horizontal son pequeños (ver figura 3). Dado que T_0 es la magnitud de la fuerza de tensión por unidad de longitud, las fuerzas en cada porción del elemento de superficie son aproximadamente $T_0 \Delta y$ y $T_0 \Delta x$.

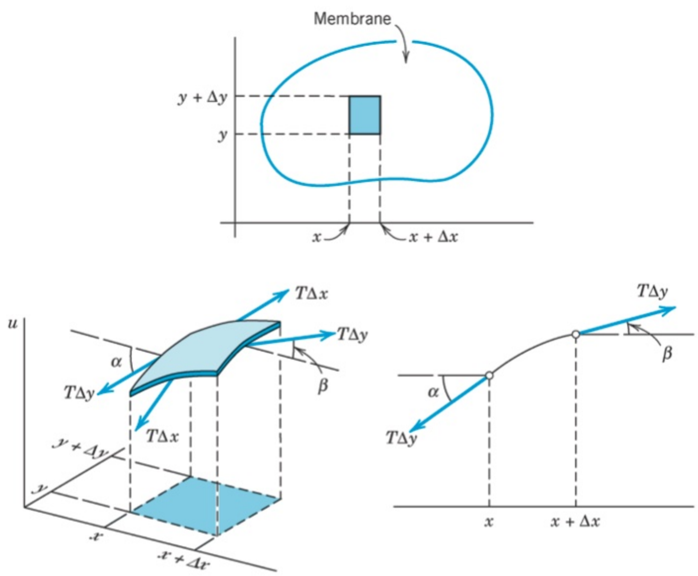

Figura 3. Membrana elástica en dos dimensiones.

Las fuerzas horizontales están en balance (por hipótesis). Por lo tanto, basta con hacer el balance de fuerzas verticales para obtener el modelo. Por ejemplo, las componentes de estas fuerzas en cada lado del elemento ΔS (ver figura 3) que es paralelo al eje x son

$$T_0 \Delta y \sin\beta, \quad \text{y}, \qquad -T_0 \Delta y \sin\alpha,$$

donde β y α son los ángulos de inclinación (que varían poco sobre el borde de ΔS) de la membrana con respecto a la horizontal en dirección x. El signo menos aparece por que la fuerza del lado izquierdo apunta hacia abajo. Como los ángulos son pequeños tenemos la aproximación

$$\begin{aligned} T_0 \Delta y(\sin\beta - \sin\alpha) &\approx T_0 \Delta y(\tan\beta - \tan\alpha) \\ &= T_0 \Delta y(u_x(x + \Delta x, \tilde{y}, t) - u_x(x, \tilde{y}, t)), \end{aligned} \tag{7}$$

donde $\tilde{y}$ es cualquier punto en $(y, y + \Delta y)$. Análogamente, el balance de fuerzas verticales de tensión del otro lado, paralelo al eje y, de ΔS es

$$T_0 \Delta x(\sin\theta_3 - \sin\theta_4) \approx T_0 \Delta x(u_y(\tilde{x}, y + \Delta y, t) - u_y(\tilde{x}, y, t)), \tag{8}$$

donde $\tilde{x} \in (x, x + \Delta x)$. Las aproximaciones (7) y (8) son equivalentes a la aproximación de fuerzas (4).

Por la segunda ley de Newton, la suma de fuerzas verticales es igual a la masa, $\rho_0 \Delta x \Delta y$, del elemento ΔS por la aceleración en dirección vertical en $(\tilde{x}, \tilde{y})$ a tiempo $t > 0$, la cual es igual a $u_{tt}(\tilde{x}, \tilde{y}, t)$. Si denotamos $h = h(x, y, t)$ a la densidad (por unidad de área) de fuerzas externas (por ejemplo, la fuerza de gravedad) entonces obtenemos:

$$\rho_0 \Delta x \Delta y u_{tt}(\tilde{x}, \tilde{y}, t) = T_0 \Delta y (u_x(x + \Delta x, \tilde{y}, t) - u_x(x, \tilde{y}, t)) + \\ + T_0 \Delta x (u_y(\tilde{x}, y + \Delta y, t) - u_y(\tilde{x}, y, t)) + \Delta x \Delta y h(\tilde{x}, \tilde{y}, t).$$

Dividiendo entre $\rho_0 \Delta x \Delta y$ se tiene que

$$u_{tt}(\tilde{x}, \tilde{y}, t) = \frac{T_0}{\rho_0}\Big(\frac{u_x(x + \Delta x, \tilde{y}, t) - u_x(x, \tilde{y}, t)}{\Delta x}\Big) + \\ + \frac{T_0}{\rho_0}\Big(\frac{u_y(\tilde{x}, y + \Delta y, t) - u_y(\tilde{x}, y + \Delta y, t)}{\Delta y}\Big) + \frac{1}{\rho_0} h(\tilde{x}, \tilde{y}, t).$$

Tomando el límite cuando $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0$, observamos que $\tilde{x} \to x$, $\tilde{y} \to y$, y obtenemos la ecuación de onda no homogénea,

$$u_{tt} - c^2(u_{xx} + u_{yy}) = \bar{h}, \qquad (x, y) \in \Omega,\ t > 0. \tag{9}$$

donde $c^2 = T_0/\rho_0 > 0$, $\bar{h} = h/\rho_0$. La ecuación (9) se complementa con condiciones iniciales de la forma

$$u(x, y, 0) = f(x, y), \quad u_t(x, y, 0) = g(x, y), \qquad (x, y) \in \Omega, \tag{10}$$

que especifican el desplazamiento y la velocidad verticales de la membrana a tiempo $t = 0$. Adicionalmente, se debe determinar condiciones de frontera en $\partial\Omega$. Por ejemplo, para el caso de la piel del tambor sujeta en el borde, las condiciones deben ser de tipo Dirichlet:

$$u(x, y, t) = a(t), \qquad (x, y) \in \partial\Omega,\ t > 0.$$

En el caso del tambor, $a = 0$, lo que significa que la membrana está sujeta en el borde y el valor del desplazamiento en la frontera es cero. Otros problemas pueden requerir condiciones de frontera tipo Neumann,

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x, y, t) = a(t), \qquad (x, y) \in \partial\Omega,\ t > 0.$$

o tipo Robin,

$$u(x, y, t) + \beta(x, y)\frac{\partial u}{\partial n}(x, y, t) = a(t), \qquad (x, y) \in \partial\Omega,\ t > 0,\ \beta > 0.$$

Finalmente, el problema global de Cauchy consiste en resolver la ecuación (9) en $\Omega = \mathbb{R}^2$ y con condiciones iniciales (10).

Referencias

[1] W. A. Strauss, *Partial differential equations. An introduction*, John Wiley & Sons Inc., New York, 1992.

Instituto de Investigaciones en Matemáticas Aplicadas y en Sistemas, Universidad Nacional Autónoma de México, Circuito Escolar s/n, C.P. 04510 Cd. de México (México)

Email address: plaza@mym.iimas.unam.mx