Ecuaciones Diferenciales Parciales

Semestre 2021-1

Tarea 3: Ecuaciones de Laplace y del calor

1. Sea $B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$. Demuestra que existe una constante positiva $C > 0$, que depende únicamente de la dimensión $n \geq 2$, tal que

$$\max_{B_1(0)} |u| \leq C \left(\max_{B_1(0)} |f| + \max_{\partial B_1(0)} |g| \right),$$

donde $f \in C(\overline{B_1(0)})$, $g \in C(\partial B_1(0))$ y u es la solución de

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f, \quad \text{en } B_1(0), \\ u &= g, \quad \text{en } \partial B_1(0). \end{aligned}$$

2. Demuestra el *teorema de Weyl*: suponiendo que $u \in C(\Omega)$ satisface

$$\int_\Omega u \Delta \varphi \, dx = 0,$$

para cualquier $\varphi \in C_0^2(\Omega)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, entonces u es armónica en Ω.

3. Prueba la *segunda desigualdad de Harnack*: si u es armónica y no negativa en la bola $B_R(0) \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, con $R > 0$, entonces para toda $x \in B_R(0)$,

$$\frac{R^{n-2}(R - |x|)}{(R + |x|)^{n-1}} u(0) \leq u(x) \leq \frac{R^{n-2}(R + |x|)}{(R - |x|)^{n-1}} u(0).$$

4. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y acotado, y supongamos que $u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ es solución de $\Delta u = u^3 - u$ en Ω, con $u = 0$ sobre $\partial\Omega$. Demuestra que $|u| \leq 1$ en $\overline{\Omega}$.

5. Sean

$$\begin{aligned} B_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}, \\ B_1^+ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1, \, y > 0\}. \end{aligned}$$

Sea $u \in C^2(B_1^+) \cap C(\overline{B_1^+})$, armónica en B_1^+ y tal que $u(x, 0) = 0$. Demuestra que la función

$$v(x, y) = \begin{cases} u(x, y), & y \geq 0, \\ -u(x, -y), & y < 0, \end{cases}$$

es armónica en B_1. A esto se le conoce como el *principio de reflexión de Schwarz*. (*Sugerencia:* Sea w la solución al problema $\Delta w = 0$ en B_1, $w = v$ en ∂B_1. Define $V(x, y) = w(x, y) + w(x, -y)$. Prueba que $V \equiv 0$.)

6. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, abierto, acotado y conexo con $\partial\Omega$ suave. Demuestra que si $\Delta u = 0$ en Ω, y además $u = \partial u/\partial n = 0$ en una porción abierta Γ de $\partial\Omega$, entonces $u = 0$ en Ω. *Sugerencia:* Sea $x_0 \in \Gamma$ y $r > 0$ tal que $B_r(x_0) \cap \partial\Omega \subset \Gamma$. Sea $B := B_r(x_0)$. Define $w = u$ en $B \cap \Omega$, y $w = 0$ en $\overline{B} \backslash \Omega$. Nota que por las condiciones sobre Γ, w es de clase C^1 en B. Demuestra la siguiente propiedad: $u \in C^1(\overline{\omega})$ con ω abierto es armónica si y sólo si

$$\int_{\widetilde{B}} \partial_\nu u \, dS_x = 0,$$

para cualquier bola $\widetilde{B}$ suficientemente pequeña tal que $\widetilde{B} \subset \omega$ (hicimos algo parecido en clase). Demuestra que esto ocurre para B. Entonces puedes aplicar (no es necesario demostrarlo) el siguiente *principio de continuación única*: Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y conexo. Si u y v son dos funciones armónicas en Ω, tales que $u = v$ en Ω' para algún $\Omega' \subset \Omega$ abierto y no vacío entonces $u = v$ en Ω. Concluye.

7. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, abierto, acotado, con frontera suave. Discute (es decir, demuestra o da un contraejemplo de) la unicidad de la solución $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ al *problema de Robin*:

$$\begin{aligned} -\Delta u = f, &\quad \text{en } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} + au = g, &\quad \text{en } \partial\Omega, \end{aligned}$$

donde $f \in C(\overline{\Omega})$, $g \in C(\partial\Omega)$ y $a > 0$ es una constante.

8. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, abierto, con $n \geq 2$. Sea $u \in C^2(\Omega)$, con $x \in \Omega$. Demuestra que

$$\Delta u(x) = \lim_{r \to 0^+} \frac{2n}{r^2} \left(\frac{1}{\omega_n} \int_{|\eta|=1} u(x + r\eta) \, dS_\eta \; - \; u(x) \right).$$

Nótese que esta fórmula implica la propiedad del promedio en caso de que la función sea armónica. (*Sugerencia:* Considera la expansión de Taylor de segundo orden alrededor de x.)

9. Sea u la solución al problema de Dirichlet en el semi-plano:

$$\begin{aligned} \Delta u = 0, &\quad \text{en } \mathbb{R}^n_+, \\ u = g, &\quad \text{sobre } \partial\mathbb{R}^n_+, \end{aligned}$$

dada por la fórmula de Poisson. Suponiendo que g es acotada, y que $g(x) = |x|$ para todo $x \in \partial\mathbb{R}^n_+$, con $|x| \leq 1$, demuestra que ∇u *no es acotado* cerca de $x = 0$. (*Hint*: Estima $(u(\lambda \hat{e}_n) - u(0))/\lambda$.)

10 (Principio del máximo de Hopf)**.** Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ abierto y acotado. Sea $u \in C^1(\bar{\Omega})$, armónica y positiva en Ω. Suponiendo que $u(x_0) = 0$ en un punto $x_0 \in \partial\Omega$, y que en x_0 se cumple *la condición del círculo interior*, a saber, que existe un círculo (o un disco) $B_R(y_0) \subset \Omega$ tal que

$$B_R(y_0) \cap \partial\Omega = \{x_0\},$$

demuestra que la derivada normal exterior de u en x_0 es estrictamente negativa:

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x_0) < 0.$$

(*Hint:* Usa el principio del máximo para comparar u con la función

$$w(x) = \frac{\log |R| - \log |y_0 - x|}{\log R - \log(R/2)} \min_{\partial B_{R/2}(y_0)} u,$$

en el anillo circular $A = B_R(y_0) \backslash B_{R/2}(y_0)$. Compara las derivadas normales en x_0.)

11. Sea

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Demuestra que la solución al problema de Cauchy,

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0, \qquad && x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(x,0) &= g(x), && x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

está dada por

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(1 + \phi(x/\sqrt{4t}\,)\right),$$

donde

$$\phi(s) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^s e^{-t^2}\, dt.$$

La función ϕ se conoce como la *función de error.*

12. Encuentra una solución explícita (escrita como una convolución) al siguiente problema:

$$\begin{aligned} u_t + u &= u_{xx} + 2u_x, \qquad && x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(x,0) &= \sin x, && x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Demuestra que para cada $x \in \mathbb{R}$, fijo, $u(x,t) \to 0$ si $t \to +\infty$. *Sugerencia:* Encuentra un cambio de variables de la forma $u = ve^{\alpha x + \beta t}$ de modo que el problema se reduzca a resolver la ecuación del calor. Recuerda que

$$\int_{\mathbb{R}} \Psi(x,t)\, dx = \frac{1}{(4\pi t)^{1/2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/4t}\, dx = 1,$$

para cada $t > 0$, donde $\Psi(x,t)$ es la solución fundamental de la ecuación del calor.

13. Considera el siguiente problema de Cauchy,

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= u + b \cdot \nabla u + e^t \sin(x_1 - b_1 t), \qquad && x \in \mathbb{R}^n,\ t \in (0,T], \\ u(x,0) &= |x|, && x \in \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

donde $T > 0$, $b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ es un vector constante. Encuentra una solución explícita a este problema. (*Sugerencia:* La función $v(x,t) = u(x - bt, t)$ satisface la ecuación diferencial con $b = 0$.)

14. Considera el siguiente problema de Cauchy para la ecuación de Burgers viscosa:

$$\begin{aligned} v_t + v v_x &= v_{xx}, \qquad x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ v(x,0) &= g(x), \qquad\qquad x \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{1}$$

donde $g \in C_0^2(\mathbb{R})$ es una función con soporte compacto. Encuentra una solución a este problema siguiendo los siguientes pasos:

(a) Suponiendo que $v \in C^{2,1}(\mathbb{R} \times (0,\infty)) \cap C(\mathbb{R} \times [0,\infty))$ es solución de la ecuación de Burgers viscosa (1), considera

$$V(x,t) := \int_0^x v(y,t)\, dy.$$

Demuestra que V es solución de la ecuación

$$V_t + \tfrac{1}{2}V_x^2 = V_{xx} + c(t),$$

donde $c = c(t)$ es una constante de integración que depende de t.

(b) Demuestra que $U(x,t) := V(x,t) - \int_0^t c(s)\, ds$ satisface la ecuación

$$U_t + \tfrac{1}{2}U_x^2 = U_{xx},$$

y considera

$$w(x,t) := \exp\left(\frac{1}{2}U(x,t)\right). \tag{2}$$

Prueba que w es solución de la ecuación del calor.

(c) Encuentra la condición inicial apropiada para w y resuelve el problema global de Cauchy para w. Encuentra una solución para (1) aplicando la transfomación inversa.

Nota: El cambio de variables (2) es notable, pues reduce un problema no lineal (la ecuación de Burgers) a una ecuación lineal y se conoce como *transformación de Hopf-Cole.*

15. Sea $u \in C^{2,1}((0,1) \times (0,\infty)) \cap C([0,1] \times [0,\infty))$ solución de

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0, & x \in (0,1),\ t > 0, \\ u(x,0) &= \sin(\pi x), & x \in [0,1], \\ u(0,t) = 2te^{1-t},\ \ u(1,t) &= 1 - \cos(\pi t), & t > 0. \end{aligned}$$

Nótese que los valores en la frontera coinciden en $(0,0)$ y $(1,0)$.

(a) Demuestra que u es no negativa.

(b) Determina cotas superiores para $u(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ y $u(\frac{1}{2}, 3)$.

16 (Principio de Hopf.)**.** Sea $u = u(x,t)$ solución de

$$u_t - u_{xx} = 0,$$

en el rectángulo $\Omega_T = (0,1) \times (0,T)$, $T > 0$, y supóngase que $u \in C^1(\overline{\Omega_T})$.

(a) Dado $0 < t_0 \leq T$ supongamos que $u(x,t) > m$ para todo $0 \leq x \leq 1$ y $0 < t < t_0$, con $u(0,t_0) = m$. Demuestra que $u_x(0,t_0) > 0$. (*Sugerencia:* Compara u con la función $z(x,t) = e^x - 1$. Observa que $z(0,t) = 0$, $z_x(0,t) = 1 > 0$.)

(b) Deduce que la solución de clase $C^1(\overline{\Omega_T})$ al problema de Neumann,

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} = 0, \qquad & \text{en } \ \Omega_T, \\ u(x,0) = g(x), \quad & 0 \leq x \leq 1, \\ u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0, \qquad & 0 < t \leq T, \end{aligned}$$

si existe, es única. Además, demuestra que, en ese caso,

$$\min_{[0,1]} g = \min_{\overline{\Omega_T}} u \leq \max_{\overline{\Omega_T}} u = \max_{[0,1]} g.$$

17. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio abierto y acotado. Sea $g \in C(\overline{\Omega})$. Suponiendo que $u \in C^{2,1}(\Omega \times (0,\infty)) \cap C(\overline{\Omega} \times [0,\infty))$ es solución de

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u = 0, \qquad & \text{en } \ \Omega \times (0,\infty), \\ u(x,0) = g(x), \qquad & x \in \Omega, \\ u = 0, \qquad & \text{sobre } \ \partial\Omega \times (0,\infty), \end{aligned}$$

demuestra que

$$\sup_{\Omega} |u(\cdot,t)| \leq Ce^{-\mu t} \sup_{\Omega} |g|,$$

para cualquier $t > 0$, donde C y μ son constantes positivas que dependen únicamente de n y de Ω.

18. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, abierto, acotado, con frontera suave. Supongamos que $f \in C(\overline{\Omega})$, $g \in C(\partial\Omega \times [0,T])$, con $T > 0$. Si $u \in C^2(\Omega \times (0,T]) \cap C(\overline{\Omega} \times [0,T])$ es una solución del problema,

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u = e^{-u}, \quad & \text{en } \ \Omega \times (0,T], \\ u(\cdot,0) = f, \quad & \text{en } \ \Omega, \\ u = g, \quad & \text{sobre } \ \partial\Omega \times (0,T), \end{aligned}$$

demuestra que

$$-M \leq u \leq Te^M + M, \qquad \text{en } \ \Omega \times (0,T],$$

donde

$$M := \max \left\{ \max_{\Omega} |f|, \max_{\partial\Omega \times (0,T)} |g| \right\}.$$

19. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ acotado, abierto, con $\partial\Omega$ suave. Demuestra que si existe una solución $u \in C^2(\overline{\Omega} \times [0,T))$ con $T > 0$ fijo, de la solución a la ecuación del calor no homogénea con condiciones iniciales y de Neumann,

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= h(x,t), \qquad && x \in \Omega,\ t \in (0,T), \\ u(x,0) &= f(x), && x \in \Omega, \\ \nabla u \cdot \hat{n} = \frac{\partial u}{\partial n} &= g(t), && x \in \partial\Omega,\ t \in (0,T), \end{aligned}$$

entonces es única. (*Sugerencia:* Aplica el método de energía.)

20. Sea $g \in C(\mathbb{R}^n)$ una función uniformemente acotada. Suponiendo que $u \in C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times (0,T]) \cap C(\mathbb{R}^n \times [0,T])$ para cierto $T > 0$ fijo, arbitrario, es solución de

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= 0, \qquad && \text{en } \mathbb{R}^n \times (0,T], \\ u(x,0) &= g(x), && x \in \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

y suponiendo, además, que u y ∇u son acotadas en $\mathbb{R}^n \times (0,T]$, demuestra que

$$\sup_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(\cdot,t)| \leq \frac{1}{\sqrt{2t}} \sup_{\mathbb{R}^n} |g|,$$

para todo $0 < t \leq T$. *Sugerencia:* Sea $|g| \leq M$ en $\mathbb{R}^n$; considera entonces la función

$$w = u^2 + 2t|\nabla u|^2 - M^2.$$

Total: 20 pts.