# Ecuaciones Diferenciales Parciales

**Semestre 2021-1**

## Tarea 1: Ecuaciones de primer orden

**1.** Encuentra una fórmula explícita para la solución al problema de Cauchy de la siguiente ecuación de transporte con *decaimiento*,

$$\begin{aligned} u_t + a \cdot \nabla u + cu = 0, &\qquad x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0, \\ u(x,0) = f(x), &\qquad x \in \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

donde $a \in \mathbb{R}^n$ es un vector constante, $c > 0$ es constante, y $\nabla u = (u_{x_1}, \ldots, u_{x_n}) \in \mathbb{R}^n$. Aquí $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función conocida de clase $C^1$. Comprueba que tu respuesta es, en efecto, solución del problema.

**2.** Encuentra la solución de la ecuación lineal

$$u_x + xu_y = y,$$

que satisface la condición inicial $u(0,y) = y^2$ para toda $y \in \mathbb{R}$. ¿Es única?

**3.** Considera la ecuación lineal de primer orden

$$yu_x + xu_y = 0,$$

con datos iniciales

$$\begin{aligned} u(x,0) &= f(x), \\ u(0,y) &= g(y). \end{aligned}$$

$f$ y $g$ son funciones conocidas de clase $C^1$ que satisfacen $f(0) = g(0)$. Determina las curvas características y prueba que cualquier solución es constante a lo largo de las mismas. Usa este hecho para dar una fórmula explícita para la solución general en las regiones (i) $x = \pm y$, (ii) $y^2 - x^2 > 0$, y (iii) $x^2 - y^2 > 0$. Verifica que la solución satisface, en efecto, la ecuación y las condiciones iniciales y que es continua en todo el plano.

**4.** Estudia el sistema característico asociado al siguiente problema de Cauchy:

$$\begin{aligned} yu_x - xu_y &= 1, \\ u(x,0) &= 0. \end{aligned}$$

Estudia la transformación $(\eta, \xi) \mapsto (x, y)$. ¿Cuándo es invertible? Si el dato inicial es de la forma $u(x,0) = f(x)$ y la solución $u = u(x,y)$ es *continua* en $x = 0$, ¿qué se puede decir de la función $f(x)$? ¿Y de $f(0)$?

**5.** Verifica que la familia de funciones, $u(x,y) = \alpha x + (1-\alpha)y$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, parametrizada por $\alpha \in \mathbb{R}$, es una familia de soluciones globales de clase $C^1$ del problema de Cauchy

$$\begin{aligned} xu_x + yu_y &= u, \\ u(x,x) &= x, \qquad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

¿Existe alguna otra solución global de clase $C^1$ que no pertenezca a la familia? *Sugerencia:* Suponiendo que existe otra solución $w = w(x,y)$ de clase $C^1$ en todo $\mathbb{R}^2$ que no pertenece a la familia, sea $v := w - u$, donde $u$ es cualquier elemento de la familia. Claramente una solución a este problema es $v = 0$. ¿Hay alguna otra?

**6.** Encuentra la solución a la siguiente ecuación cuasi-lineal de primer orden

$$u_x + u_y = u^4,$$

con datos iniciales $u(x,0) = x^2$. Resuelve el sistema característico asociado. Analiza la invertibilidad del mapeo $(\xi,\eta) \mapsto (x,y)$, y determina la región de existencia de la solución.

**7.** Considera la ecuación cuasi-lineal

$$uu_x + yu_y = x,$$

con datos sobre la curva en el plano

$$\mathcal{I} = \{(\xi,\xi) \in \mathbb{R}^2 \, : \, \xi > 0\}.$$

Determina si existe una única solución, si no hay soluciones, o bien si existe un número infinito de soluciones de clase $C^1$ en una vecindad del punto $(1,1) \in \mathcal{I}$ para cada uno de los siguientes datos iniciales:

(a) $u = 2\xi$ sobre $\mathcal{I}$,

(b) $u = \xi$ sobre $\mathcal{I}$,

(c) $u = \sin(\pi\xi/2)$ sobre $\mathcal{I}$.

**8.** Resuelve el siguiente problema de Cauchy:

$$\begin{aligned} xu_x + yu_y &= -u, \\ u(\cos\xi, \sin\xi) &= 1, \qquad 0 \leq \xi \leq \pi. \end{aligned}$$

¿La solución es global?

**9.** Considera el problema de Cauchy:

$$\begin{aligned} yu_x + xu_y &= 0, \\ u(e^{\xi}, e^{\xi}) &= \tfrac{1}{2}\xi^2, \qquad \xi \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Demuestra que no existe solución de clase $C^1$ en ninguna vecindad del punto $(1,1,0)$.

**10.** Considera el siguiente problema de Cauchy:

$$\begin{aligned} uu_x + u_y &= 1, \\ u(\xi - \xi^2, \xi) &= \xi, \end{aligned}$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}$. ¿Existe alguna solución de clase $C^1$ en una vecindad del punto $(2/9, 1/3, 1/3)$? Explica tu respuesta.

**11.** Resuelve la ecuación lineal

$$u_x + 5yx^2 u_y = u + 2,$$

con condición inicial $u(0, y) = y + 2$. ¿Es la única solución de clase $C^1$ en una vecindad de la curva inicial? ¿Está definida globalmente? Explica tu respuesta.

**12.** Resuelve la ecuación lineal

$$xu_y - yu_x = u,$$

con condición inicial $u(x, 0) = f(x)$, donde $f$ es una función arbitraria de clase $C^1$. ¿Dónde está definida la solución? Clasifica el conjunto de funciones $f$ para las cuales existe una solución *global* de clase $C^1$ al problema.

**13.** Resuelve la ecuación completamente no lineal,

$$xu_x + yu_y + u_x u_y - u = 0,$$

con condición inicial $u(x, -x) = 1$. ¿Es la solución única? ¿Es global?

**14.** Resuelve el siguiente problema de Cauchy completamente no lineal:

$$\begin{aligned} u_x + u_y^2 &= 0, \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \\ u(0, y) &= 3y, \qquad y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

**15.** (**Partícula clásica en una dimensión con potencial lineal.**) Sea una partícula clásica de masa $m > 0$ en una dimensión, sujeta a un potencial lineal de la forma $V = V(x) = kx$, con $k > 0$ constante. El lagrangiano se define mediante

$$L(y, z) = \tfrac{1}{2} m z^2 - ky, \qquad y, z \in \mathbb{R}.$$

(a) Encuentra el momento generalizado $q = Q(y, p)$ y el hamiltoniano asociado $H = H(y, p)$.

(b) Demuestra que la ecuación de Hamilton-Jacobi para la función geodésica es

$$u_t + \frac{1}{2m} u_x^2 + kx = 0.$$

(c) Resuelve la ecuación de Hamilton-Jacobi con condición inicial de la forma $u(x,0) = f(x)$ en términos de la posición $x$ y del momento $p/m$.

**16.** Encuentra una solución entrópica de clase $C^1$ por pedazos a la ecuación de Burgers

$$u_t + \left(\tfrac{1}{2}u^2\right)_x = 0, \tag{1}$$

con condición inicial

$$u(x,0) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & 0 < x < 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

Discute la unicidad de la solución en dicha clase de soluciones.

**17.** Encuentra la única solución entrópica al problema de Cauchy para la ecuación de Burgers (1) con condición inicial

$$u(x,0) = u_0(x) = \begin{cases} 1, & x < -1 \\ 0, & -1 \le x \le 0, \\ 2 & 0 < x < 1, \\ 0, & x \ge 1. \end{cases}$$

Encuentra una fórmula explícita para la solución para todo $t > 0$ y $x \in \mathbb{R}$. *Sugerencia:* Observemos que la condición inicial contiene *saltos entrópicos* (es decir, valores a la izquierda mayores que el valor a la derecha, $u_L > u_R$, caso convexo) en $x = -1$ y $x = 1$, por lo cual la formación de choques o discontinuidades es instantánea. Para tiempos cortos existen dos ondas de choque que “emanan” de $x = -1$ y de $x = 1$.

**18.** Considera el modelo de tráfico de Lighthill-Whitham-Richards (LWR),

$$\rho_t + \big(\rho(1-\rho)\big)_x = 0, \qquad x \in \mathbb{R},\ t > 0, \tag{2}$$

con condición inicial

$$\rho(x,0) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x < 0, \\ 0, & x > 0. \end{cases}$$

Encuentra una solución débil al problema de Cauchy. ¿Es la solución encontrada continua? Si acaso tiene discontinuidades, ¿éstas satisfacen la condición de entropía de Lax? Interpreta la solución en términos del flujo de tráfico. ¿Qué significado tiene la condición inicial?

**19.** Considera el modelo de tráfico LWR (ecuación (2)) sujeto a la condición inicial

$$\rho(x,0) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & 0 \le x \le 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

Encuentra una solución débil y entrópica para todo tiempo $t > 0$. Escribe la solución explícitamente. ¿Porqué es entrópica? *Sugerencia:* Dado que la función de flujo es cóncava, las discontinuidades de $\rho(0, x)$ en $x = 0$ y en $x = 1$ dan lugar a una onda de choque y a una onda de rarefacción, respectivamente. Interpreta tu respuesta en términos de flujo de tráfico. Compara con la solución de la ecuación de Burgers (1) con los mismos datos iniciales vista en clase.

**20.** (**Tráfico en un túnel**.) Un modelo más realista para el flujo de tráfico en el interior de un túnel largo es el siguiente:

$$\rho_t + \big(\rho u(\rho)\big)_x = 0, \qquad x \in \mathbb{R},\ t > 0,$$

donde

$$u(\rho) = \begin{cases} u_{\max}, & 0 \leq \rho \leq \rho_c, \\ \lambda \log\left(\frac{\rho_{\max}}{\rho}\right), & \rho_c \leq \rho \leq \rho_{\max}, \end{cases}$$

$$\lambda := \frac{u_{\max}}{\log(\rho_{\max}/\rho_c)}.$$

La velocidad $u$ es continua como función de $\rho$, incluso en el valor de la densidad crítica $\rho_c = \rho_{\max} \exp(-u_{\max}/\lambda)$. Si la densidad de los autos es $\rho \leq \rho_c$ entonces éstos viajan con velocidad igual a la velocidad máxima. Si la entrada del túnel se localiza en $x = 0$ y los autos esperan la apertura del mismo a tiempo $t = 0$, la densidad inicial de los autos está dada por

$$\rho(x, 0) = \begin{cases} \rho_{\max}, & x < 0, \\ 0, & x > 0. \end{cases}$$

Resuelve el problema de Riemann asociado al modelo de tráfico. Especifica la densidad y la velocidad del tráfico como funciones de $x$ y de $t$. Si un auto se encuentra en la posición $x = \xi_0 < 0$ determina la trayectoria del auto y el tiempo que tarda en entrar al túnel.

Total: 20 pts.