Lección 4.3: Regularidad. Método de energía. Principio fuerte del máximo.

Observación: si $g \in C(\mathbb{R}^n)$, uniformemente acotada $|g(x)| \leq C$, hemos demostrado que

$$u(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{e^{-|x-y|^2/4t}}_{\Phi(x-y,t)} g(y)\, dy$$

$$\in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$$

Sean $T>0$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto, acotado, $\Omega_T := \Omega \times [0,T]$, $\Gamma_T = \overline{\Omega_T} \setminus \Omega$.

Teorema (regularidad)
Sea $u \in C^{2,1}(\Omega_T)$ solución de $u_t = \Delta u$ en Ω_T.
Entonces $u \in C^\infty(\Omega_T)$.

Observaciones:

(a) $C^{2,1}(\Omega_T) := \{ u \in C(\Omega_T) : u_t, D_x u, D_x^2 u \ \exists$ y son continuas en $\Omega_T \}$

(b) El teorema es válido incluso si toma valores "no suaves" en Γ_T incluyendo $\Omega \times \{t=0\}$. Las condiciones iniciales pueden ser discontinuas.

Dem. Definimos

(1).- $$\mathcal{C}(x,t,r) := \{ (y,s) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty] : |x-y| \leq r, \ t-r^2 \leq s \leq t \}$$

cilindro cerrado de radio $r>0$, altura $r^2>0$ y centro en la tapa en (x,t).

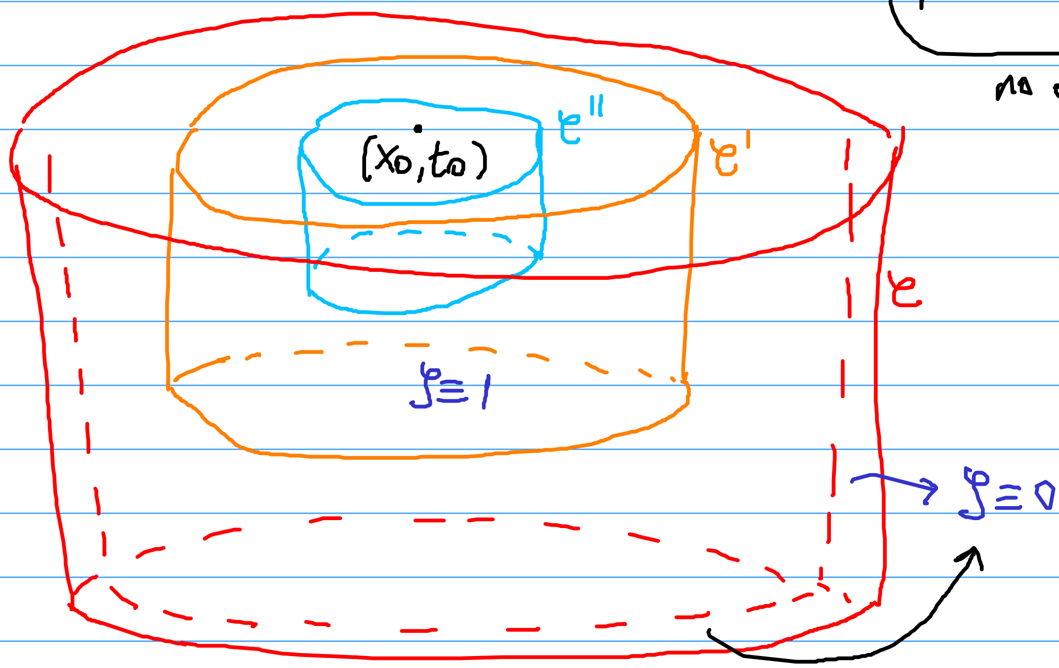
Fijemos $(x_0,t_0)\in\Omega_T$, sea $r>0$ suf. pequeño tal que $\mathcal{C}(x_0,t_0,r)\subset\Omega_T$. Sean $\mathcal{C}' := \mathcal{C}(x_0,t_0,\frac{3}{4}r)$, $\mathcal{C}'' := \mathcal{C}(x_0,t_0,\frac{1}{2}r)$.

Sea $\zeta=\zeta(x,t)$ una función cut-off, suave, tal que:

- $0\leq\zeta\leq 1$
- $\zeta\equiv 1$ en $\mathcal{C}'$
- $\zeta=0$ cerca de la frontera de $\mathcal{C}$.

parabólica

no en la tapa



Extendemos $\zeta\equiv 0$ en $(\mathbb{R}^n\times[0,t_0])\setminus\mathcal{C}$.

Supongamos que $u\in C^\infty(\Omega_T)$. Sea

$$v(x,t) := \zeta(x,t)\,u(x,t) \qquad \begin{array}{l} x\in\mathbb{R}^n \\ 0\leq t\leq t_0 \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad v_t = \varphi_t u + \varphi u_t$$
$$\Delta v = \varphi \Delta u + 2\nabla\varphi \cdot \nabla u + u\Delta\varphi$$

$\therefore$ v es solución de :

$$(2)\cdots \begin{cases} v_t - \Delta v = \tilde{f} & \text{en } \mathbb{R}^n \times (0,t_0] \\ v = 0 & \text{en } \mathbb{R}^n \times \{t=0\} \end{cases}$$

donde $\tilde{f} := \varphi_t u - 2\nabla\varphi \cdot \nabla u - u\Delta\varphi$.

(2) es un problema global de Cauchy, no homogéneo. Por def. v es acotada. Por unicidad (clase de Tychonov) y el principio de Duhamel :

$$(3)\cdots \quad v(x,t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t-s)\,\tilde{f}(y,s)\,dy\,ds$$

Sea $(x,t) \in \mathcal{C}''$. Dado que $\varphi = 0$ fuera de $\mathcal{C}$:

$$\underset{(x,t)\in\mathcal{C}''}{v(x,t) = u(x,t)} = \int_{\mathcal{C}} \Phi(x-y,t-s) \underbrace{\left[\varphi_t u - 2\nabla\varphi\cdot\nabla u - u\Delta\varphi\right](y,s)}_{[*]}\,dy\,ds$$

La expresión $[*]$ se anula en una región cerca de la singularidad de $\Phi(x-y,t-s)$, en $(y,s) = (x,t)$: $\varphi_t = \nabla\varphi = \Delta\varphi \equiv 0$ cerca de (x,t).

Integrando por partes :

$$(4)\ldots \quad u(x,t) = \int_{\mathcal{C}} \Big[\Phi(x-y,t-s)\big(\zeta_s - \Delta\zeta\big)(y,s) + 2\nabla_y \Phi(x-y,t-s)\cdot \nabla_y \zeta(y,s)\Big] u(y,s)\, dy ds$$

$$=: \int_{\mathcal{C}} K(x,t,y,s)\, u(y,s)\, dy\, ds \qquad \forall \quad (x,t)\in \mathcal{C}''$$

con núcleo:

$$(5)\ldots \quad K(x,t,y,s) := \Phi(x-y,t-s)\big(\zeta_s - \Delta_y \zeta\big)(y,s) + 2\nabla_y \Phi(x-y,t-s)\cdot \nabla_y \zeta(y,s)$$

Nota: la fórmula (4) es válida si solamente $u\in C^{2,1}(\Omega_T)$: alisamiento de u

$u^\varepsilon := \eta^\varepsilon * u$ alisador de Friedrichs η^ε en (y,s)

$u^\varepsilon \in C^\infty$, $u^\varepsilon \to u$ a.e. si $\varepsilon \to 0^+$ uniformemente en compactos de Ω_T

Si u no es C^∞, tomamos (4) para u^ε y su límite cuando $\varepsilon \to 0^+$.

Notemos que $K(x,t,y,s) = 0$ si $(y,s)\in \mathcal{C}'$ ya que $\zeta\equiv 1$ en $\mathcal{C}'$. Así, K es suave en $\mathcal{C}\setminus\mathcal{C}'$.

De la expresión:

$$u(x,t) = \int_{\mathcal{C}} K(x,t,y,s)\, u(y,s)\, dy\, ds \quad \forall (x,t)\in \mathcal{C}''$$

deducimos que $u \in C^\infty$ en $\mathcal{C}'' = \mathcal{C}(x_0, t_0, \frac{1}{2}r)$

$\square$

<u>Teorema</u> (estimaciones de las derivadas)
Para cada par $k, l \in \{0, 1, 2, \dots\}$ existe $C_{k,l} > 0$ uniforme tal que

$$(6) \cdots \quad \max_{\mathcal{C}(x,t,\frac{r}{2})} |D_x^k \partial_t^l u| \leq \frac{C_{kl}}{r^{k+2l+n+2}} \|u\|_{L^1(\mathcal{C}(x,t,r))}$$

donde $\|u\|_{L^1(\mathcal{C}(x,t,r))} := \int_{\mathcal{C}(x,t,r)} |u(y,s)| \, dy \, ds$

para todos los cilindros $\mathcal{C}(x,t,\frac{r}{2}) \subset \mathcal{C}(x,t,r) \subset \Omega_T$ y toda solución $u \in C^{2,1}(\Omega_T)$ de la ecuación del calor en Ω_T.

<u>Dem.</u> Ejercicio (Evans, pg. 61) $\triangle$

<u>Método de energía</u>

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto, acotado, $\partial\Omega$ C^1 x pedazos
Problema :

$$(1) \cdots \begin{cases} u_t - \Delta u = h & \text{en } \Omega_T \\ u = g & \text{sobre } \Gamma_T \end{cases}$$

$T > 0$ fijo, $\Omega_T = \Omega \times (0, T]$, $\Gamma_T = \overline{\Omega}_T \setminus \Omega_T$
$h \in C(\overline{\Omega}_T)$, $g \in C(\Gamma_T)$ conocidas.

Principio débil del máximo: si $u \in C^{2,1}(\Omega_T) \cap C(\bar{\Omega}_T)$ es solución de (1) entonces es <u>única</u>.

Demostración alternativa: sean u_1, u_2 dos soluciones de (1). Entonces $v := u_1 - u_2$ $\in C^{2,1}(\Omega_T) \cap C(\bar{\Omega}_T)$ resuelve

$$(2) \cdots \quad \begin{cases} v_t - \Delta v = 0 & \text{en } \Omega_T \\ v = 0 & \text{sobre } \Gamma_T \end{cases}$$

Para cada $t \in [0,T]$ definimos la <u>energía</u>:

$$(3) \cdots \quad E(t) := \frac{1}{2} \int_\Omega |v(x,t)|^2 \, dx$$

Calculamos:

$$\frac{dE}{dt} = \int_\Omega v v_t \, dx = \int_\Omega v \Delta v \, dx$$
$$= - \int_\Omega |\nabla v|^2 dx + \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial v}{\partial \nu} \, dS_x$$

Pero $v = 0$ sobre Γ_T $\Rightarrow$ $v = 0$ sobre $\partial\Omega \times (0,T]$

$$\therefore \quad \frac{dE}{dt} = - \int_\Omega |\nabla v|^2 dx \leq 0$$

$E = E(t)$ es no creciente: $E(t) \leq E(0)$ $\forall\ t \in (0,T]$

Pero $E(0) = \int_\Omega v(x,0)^2 dx = 0$

por que $v=0$ sobre $\Gamma_T \supset \Omega\times\{t=0\}$

$\therefore \quad 0\leq E(t)\leq 0 \quad \Rightarrow \quad E(t)=0 \quad \forall t\in[0,T]$

$\Rightarrow \quad v(x,t)=0 \quad \forall\; x\in\Omega,\; t\in(0,T]$

$\therefore \quad v\equiv 0$ en $\overline{\Omega}_T$ (unicidad) $\square$

Principio fuerte del máximo

$\Omega\subset\mathbb{R}^n$, abierto, acotado, conexo.

$T>0$ fijo $\qquad \Omega_T=\Omega\times(0,T]$

$\qquad\qquad\quad \Gamma_T=\overline{\Omega}_T\setminus\Omega_T$

Definimos la "bola (elipsoide) de calor"

(1) ... $B(x,t,r):=\left\{(y,s)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R} \;:\; s\leq t,\; \Phi(x-y,t-s)\geq\frac{1}{r^n}\right\}$

Propiedades:

(i) $B(x,t,r)$ es cerrado, conexo con frontera dada por $\Phi(x-y,t-s)=\frac{1}{r^n}$

(ii) $B(x,t,r)$ es la bola $B(0,0,r)$ trasladada a (x,t).

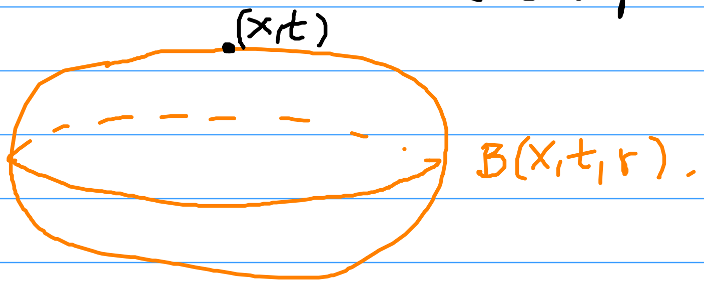
(iii) $B(0,0,r)$ se obtiene de $B(0,0,1)$ tras el reescalamiento $y\mapsto ry$, $s\mapsto r^2 s$.

(iv) $\forall\,(x,t)\in\Omega_T$ existe $r>0$ tal que $B(x,t,r)\subset\Omega_T$.

Si $(x,t)=(y,s)$ entonces $\infty=\Phi>\frac{1}{r^n}$

$\therefore\ (x,t)\in B(x,t,r)$

Si $r\to 0^+$ la bola se colapsa en (x,t).



<u>Lema</u> (propiedad del promedio)

Sea $u\in C^{2,1}(\Omega_T)$ una solución de la ecuación del calor, $u_t=\Delta u$, en Ω_T. Entonces

$$[2]\cdots\qquad u(x,t)=\frac{1}{4r^n}\int_{B(x,t,r)} u(y,s)\,\frac{|x-y|^2}{(t-s)^2}\,dy\,ds$$

$\forall\ B(x,t,r)\subset\Omega_T$, con $r>0$.

<u>Corolario</u> Tomando $u\equiv 1$ obtenemos

$$\int_{B(0,0,1)}\frac{|y|^2}{s^2}\,dy\,ds=4$$

es el volumen de la bola de calor de radio $r=1$ con la medida pesada $\frac{|y|^2}{s^2}\,dy\,ds$ independiente de n.

<u>Dem.</u> Ejercicio ; Evans, sec. 2.3, pg. 52

$\square$

Teorema (principio fuerte del máximo)

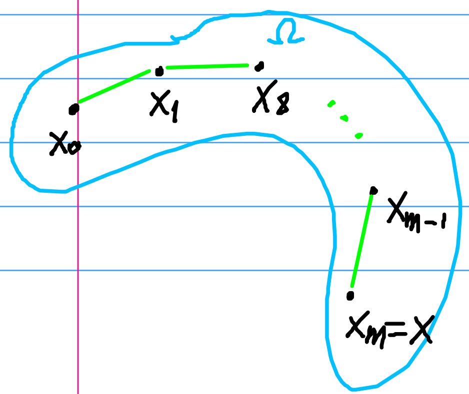
Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, abierto, acotado, conexo por trayectorias, $T>0$, fijo. Sea $u \in C^{2,1}(\Omega_T) \cap C(\bar{\Omega}_T)$ solución de la ecuación del calor, $u_t = \Delta u$, en Ω_T. Si existe $(x_0, t_0) \in \Omega_T$ tal que

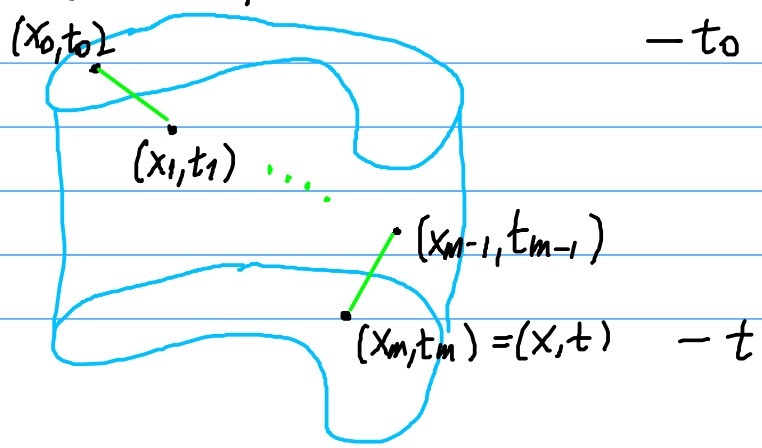
$$M := \max_{\bar{\Omega}_T} u(x,t) = u(x_0, t_0),$$

entonces u es constante en $\bar{\Omega}_{t_0} = \bar{\Omega} \times [0, t_0]$.

Nota: la conclusión, $u \equiv M$ constante, aplica sólo en el pasado, para $t \leq t_0$.

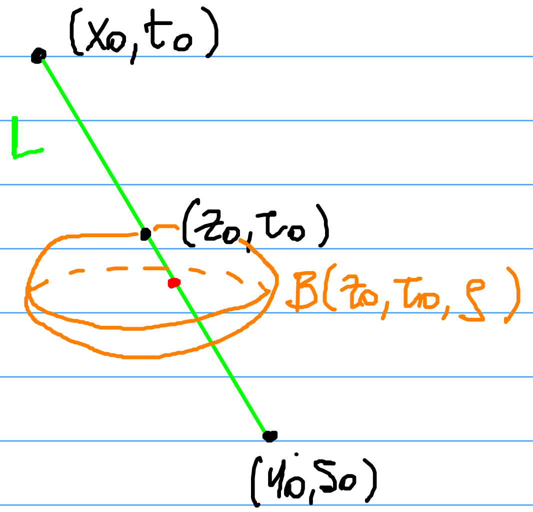
Demostración: sea $x \in \Omega$, fijo. Sea $t \in (0, t_0)$; Ω conexo por trayectorias $\Rightarrow$ podemos seleccionar un conjunto finito de puntos, $x_0, x_1, \dots, x_m = x$, $m \in \mathbb{N}$, tales que los segmentos en $\mathbb{R}^n$ que conectan x_{j-1} con x_j, $j = 1, \dots, m$, están contenidos en Ω. Asimismo, seleccionamos $t_0 > t_1 > \dots > t_{m-1} > t_m = t$, tales que los segmentos en $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ que conectan (x_{j-1}, t_{j-1}) con (x_j, t_j), $j = 1, \dots, m$, están contenidos en Ω_T.





Claramente, $(x_0,t_0) \in \Omega_T$ entonces $\Omega_{t_0} \subset \Omega_T$.

Sea cualquier segmento $L \subset \Omega_T$ que conecta (x_0,t_0) con cualquier otro punto $(y_0,s_0) \in \Omega_T$ con $s_0 < t_0$



Definimos:

$$\tau_0 := \min \left\{ s \geq s_0 : u(x,t) = u(x_0,t_0) \; \forall (x,t) \in L, \; s \leq t \leq t_0 \right\}$$

Dado que u es continua, el min ocurre en $\tau_0 \geq s_0$. Supongamos que

$$\tau_0 > s_0$$

Entonces, $u(x_0,t_0) = u(z_0,\tau_0)$ para cierto $(z_0,\tau_0) \in L$. Sea la bola de calor con centro en (z_0,τ_0) y radio $\rho > 0$ suf. pequeño tal que $B(z_0,\tau_0,\rho) \subset \Omega_T$.

Por propiedad del promedio:

$$u(x_0,t_0) = u(z_0,\tau_0) \underset{(*)}{=} \frac{1}{4\rho^n} \int_{B(z_0,\tau_0,\rho)} u(y,s) \frac{|z_0-y|^2}{(\tau_0-s)^2}\, dy\, ds$$

Pero, la igualdad $(*)$ es cierta sólo si
$u(y,s) \equiv u(z_0,\tau_0)$ $\forall\, (y,s) \in B(z_0,\tau_0,\rho)$.

$$u(y,s) \leq u(z_0,\tau_0) = u(x_0,t_0) = M \quad \text{máx en } \Omega_T.$$

Supongamos que

$$u(y,s) < u(z_0,\tau_0)$$

$\forall\, (y,s) \in \tilde{B}$ bola, tal que $\tilde{B} \subset B(z_0,\tau_0,\rho)$
por continuidad.

observamos:

$$(2) \Rightarrow \quad 1 = \frac{1}{4\rho^n} \int_{B(z_0,\tau_0,\rho)} \frac{|z_0-y|^2}{(\tau_0-s)^2}\, dy\, ds.$$

obtenemos:

$$u(z_0,\tau_0) = \frac{1}{4\rho^n} \int_{B(z_0,\tau_0,\rho)\setminus\tilde{B}} u(y,s) \frac{|z_0-y|^2}{(\tau_0-s)^2}\, dy\, ds$$
$$+ \frac{1}{4\rho^n} \int_{\tilde{B}} u(y,s) \frac{|z_0-y|^2}{(\tau_0-s)^2}\, dy\, ds$$
$$< \frac{1}{4\rho^n} \int_{B(z_0,\tau_0,\rho)\setminus\tilde{B}} (\text{''})\, dy\, ds \; +$$
$$+ \frac{u(z_0,\tau_0)}{4\rho^n} \int_{\tilde{B}} \frac{|z_0-y|^2}{(\tau_0-s)^2}\, dy\, ds$$
$$\leq \frac{u(z_0,\tau_0)}{4\rho^n} \int_{B(z_0,\tau_0,\rho)} \frac{|z_0-y|^2}{(\tau_0-s)^2}\, dy\, ds = u(z_0,\tau_0)$$

contradicción.

concluimos que $u(y,s) \equiv u(z_0, \tau_0)$ $\forall (y,s) \in B[z_0, \tau_0, \rho)$.

Pero $B[z_0, \tau_0, \rho)$ contiene a $L \cap \{\tau_0 - \epsilon \leq t < \tau_0\}$ para cierto $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño. Esto contradice la definición de τ_0.

concluimos que $\tau_0 = S_0$, y $u(x,t) \equiv u(x_0, t_0)$ $\forall (x,t) \in L$.

Dado que L es un segmento arbitrario de Ω_T, el resultado se aplica a todos los segmentos L_j que conectan (x_{j-1}, t_{j-1}) con (x_j, t_j) $j = 1, \ldots, m$, cuya unión conecta (x_0, t_0) con $(x_m, t_m) = (x, t)$ contenida en Ω_T.

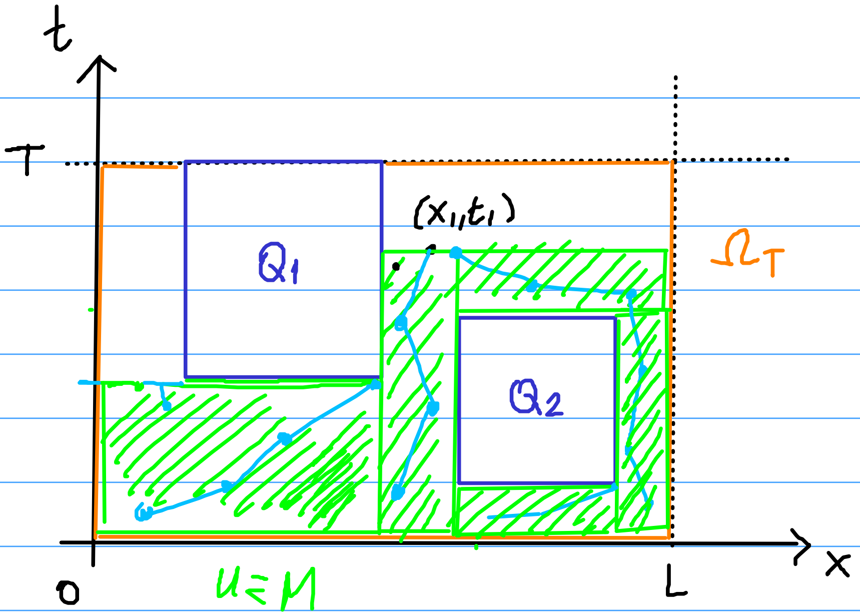
concluimos que $u(x,t) \equiv u(x_0, t_0)$
$\forall (x,t) \in \overline{\Omega} \times [0, t_0] = \overline{\Omega}_{t_0}$ $\square$

Ejercicios:

(A) Sea $u \in C^{2,1}(\Omega_T) \cap C(\overline{\Omega_T})$ una solución de $u_t - u_{xx} = 0$ en Ω_T, con

$$\Omega_T = \big((0,L) \times (0,T] \big) \setminus \big(\overline{Q_1} \cup \overline{Q_2} \big)$$

como en la figura:

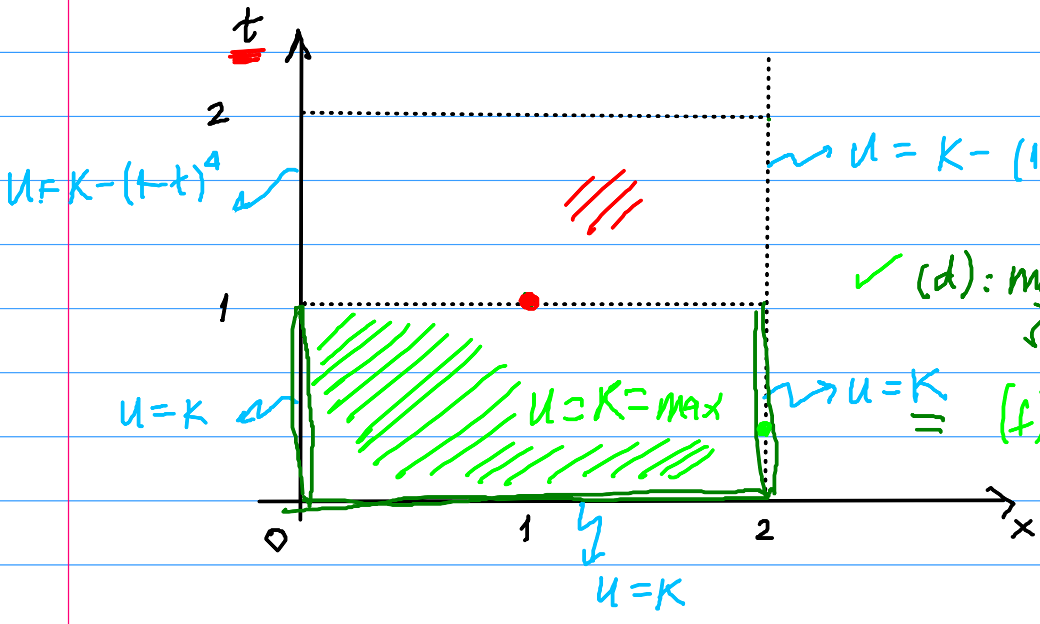


Supongamos que $u(x_1,t_1) = \max\limits_{\overline{\Omega_T}} u(x,t) =: M$ con $(x_1,t_1) \in \Omega_T$. ¿En dónde más es $u \equiv M$?

(B) Sea
$$g(t) = \begin{cases} K, & 0 \leq t \leq 1 \\ K-(1-t)^4, & 1 < t \leq 2 \end{cases}$$
con $K \geq 0$ constante. Sea $T=2$

$$\Omega_T = \Omega \times (0,T] = (0,2) \times (0,2]$$

Sea $u \in C^{2,1}(\Omega_T) \cap C(\overline{\Omega_T})$ una solución de
$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & \text{en } \Omega_T \\ u = g & \text{sobre } \Gamma_T \end{cases}$$



✓ (d): $\max_{\overline{\Omega}_T} u \leq \max_{\Gamma_T} u$

(f): $\overline{\Omega}_1 = \overline{\Omega}_{t_0}$ ✓

$(x_0, t_0) = 1$

Calcular $u(1,1)$, calcular $\max_{\overline{\Omega}_T} u = u(1,1) = K$

¿Esto contradice el principio fuerte del máximo?