Lección 4.1: Ecuación del calor: solución fundamental y problema global de Cauchy.

Ecuación del calor:

$$u_t - D\Delta u = f, \qquad \cdots \quad (1)$$

donde $u = u(x,t) \in \mathbb{R}$, $x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, abierto, $t > 0$ (tiempo), $D > 0$ constante, $f = f(x,t)$ conocida. $\Delta = \sum_{j=1}^{n} \partial_{x_j}^2$

Si $f = 0$ la ec. (1) es homogénea.

Motivación: modelación de la conducción del calor. Fourier $\sim$ 1820's

Ω = cuerpo rígido, conductor del calor.

Hipótesis:
- medio homogéneo (densidad cte.)
- " isotrópico (el calor se conduce de la misma forma en toda dirección)

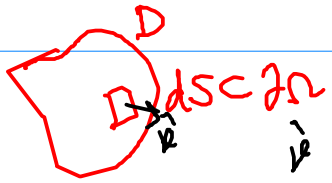
$\rho_0 > 0$ densidad constante (de masa)

$e = e(x,t)$ densidad de energía térmica

Sea $D \subset \Omega$. $\displaystyle\int_D \rho_0\, e(x,t)\, dx$

$\bar{q} = \bar{q}(x,t) \in \mathbb{R}^n$ flujo de calor

$-\bar{q} \cdot \hat{\nu}\, dS$ = la cantidad de calor que entra al elemento D por $dS \subset \partial D$



$\hat{\nu}$ - normal ext.

Flujo total (térmico) $\quad - \int_{\partial D} \bar{q} \cdot \hat{\nu} \, dS$

$r = r(x,t) \in \mathbb{R}$ — razón de cambio del calor suministrado a D por unidad de masa.

$$\int_D \rho_0 \, r(x,t) \, dx$$

Conservación de energía:

$$\frac{d}{dt} \int_D \rho_0 \, e(x,t) \, dx = - \int_{\partial D} \bar{q} \cdot \hat{\nu} \, dS + \int_D \rho_0 \, r(x,t) \, dx$$

$\Rightarrow$ teoremas de div. + localización

$$\rho_0 e_t + \mathrm{div}_x \bar{q} = \rho_0 r \qquad \dots (2)$$

$e, \bar{q}$ desconocidas

Relaciones constitutivas:

I. Ley empírica de Fourier: de transferencia de calor

$u(x,t)$ — temp. del medio

$$\bar{q} = -k \nabla u \qquad \dots (3)$$

$k > 0$ constante (conductividad térmica).

II. Termodinámica :

(4) ... $e = C_v u$ energía térmica $\propto$ temp.

$C_v > 0$ constante, calor específico a vol. constante.

sustituyendo :

$$\rho_0 C_v u_t - k \Delta u = \rho_0 r$$

Definimos $D := \dfrac{k}{\rho_0 C_v} > 0$

$\Rightarrow$ $u_t = D \Delta u + f$ ec. del calor

$$f := \frac{1}{C_v} r(x,t)$$

cambio de variables

$$\tilde{u}(x,t) = u(\sqrt{D}x, t)$$
$$\tilde{f}(x,t) = \frac{1}{C_v} r(\sqrt{D}x, t)$$

$\Rightarrow$ $\tilde{u}_t = \Delta \tilde{u} + \tilde{f}$

Unidades de D : $u_t = D \Delta u + f$

$$\frac{[\theta]}{[T]} = [D] \frac{[\theta]}{[L]^2}$$

$$[D] = \frac{[L]^2}{[T]} \qquad \frac{(\text{longitud})^2}{\text{tiempo}}$$

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ dominio abierto. $n \geq 1$, $T > 0$.

$\Omega_T := \Omega \times (0, T]$ cilindro espacio-temporal ó dominio paraboólico.

— condiciones iniciales :

$$u(x,0) = g(x), \qquad \forall x \in \overline{\Omega} \qquad \cdots (5)$$

— condiciones de frontera $(\Omega \neq \mathbb{R}^n)$:

{Dirichlet} • $u(x,t) = h(x,t), \quad x \in \Gamma \subset \partial\Omega, \ t \in (0,T]$

temp. conocida en frontera

{Neumann} • $\frac{\partial u}{\partial \hat{\nu}} = \nabla u \cdot \hat{\nu} = h(x,t), \quad x \in \Gamma \subset \partial\Omega, \ t \in (0,T]$

flujo de calor conocido.

{Robin o radiación} • $\frac{\partial u}{\partial \hat{\nu}} + a(x,t)\, u = h(x,t)$, ″

Problema global de Cauchy :

$$\begin{cases} u_t = D \Delta u + f, & x \in \mathbb{R}^n, \ t > 0 \\ u(x,0) = g(x), & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Conducción de calor en un medio infinito :

$n = 1$, $x \in \mathbb{R}$ - - ——— - - -

Problema de Cauchy

Ec. del calor homogénea:

$$(1) \cdots \begin{cases} u_t - \Delta u = 0, & x \in \mathbb{R}^n, \ t > 0 \\ u(x,0) = g(x), & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

$(D \equiv 1, \quad n \geq 1)$ $\quad g = g(x)$ conocida.

Transformada de Fourier:

$$(2) \cdots \begin{cases} \hat{u}(\xi, t) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} u(x,t) \, dx \\ \xi \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Por propiedades:

- $\hat{u_t}(\xi,t) = \frac{d}{dt} \hat{u}(\xi,t)$
- $\widehat{u_{x_j x_j}}(\xi,t) = -\xi_j^2 \, \hat{u}(\xi,t)$

$$\Rightarrow \quad \widehat{\Delta u} = -|\xi|^2 \hat{u}(\xi,t)$$

Supongamos que u es suficientemente suave:

$$u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in C^\infty ; \quad \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ \forall \alpha, \beta}} |x^\alpha \partial^\beta u| < \infty \right\}$$

Si $u(\cdot,t) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ solución de $(\partial_t - \Delta) u = 0$:

$$(1) \Rightarrow \begin{cases} \frac{d}{dt}\hat{u}(\xi,t) + |\xi|^2 \hat{u}(\xi,t) = 0 \\ \hat{u}(\xi,0) = \hat{g}(\xi), \qquad g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \end{cases}$$

solución : $\hat{u}(\xi,t) = \hat{g}(\xi)\, e^{-|\xi|^2 t}$

Aplicando transformada inversa :

$$u(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi\cdot x} e^{-|\xi|^2 t} \hat{g}(\xi)\, d\xi$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\xi|^2 t} e^{i\xi\cdot(x-y)} g(y)\, dy\, d\xi$$

$$t|\xi|^2 + i\xi\cdot(y-x) = t\left|\xi + i\frac{(y-x)}{2t}\right|^2 - \frac{|x-y|^2}{4t}$$

Si $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ obtenemos :

$$u(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-t\left|\xi + i\frac{(y-x)}{2t}\right|^2} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} g(y)\, d\xi\, dy$$

$$\eta = \sqrt{t}\left(\xi + \frac{i(y-x)}{2t}\right)$$

$$d\eta = t^{n/2}\, d\xi$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^n}\frac{1}{t^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} e^{-|\eta|^2} g(y)\, d\eta\, dy$$

$$= \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} g(y)\, dy$$

$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\eta|^2} d\eta = \pi^{n/2}$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} K(x,y,t)\, g(y)\, dy$$

$$K(x,y,t) = \frac{e^{-|x-y|^2/4t}}{(4\pi t)^{n/2}}$$ núcleo del calor

Definición La función

(3).- $$\Phi(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}, & x \in \mathbb{R}^n,\ t>0 \\ 0, & x \in \mathbb{R}^n,\ t=0 \end{cases}$$

es la solución fundamental de la ecuación del calor.

$$K(x,y,t) = \Phi(x-y,t) = \Phi(|x-y|,t)$$

Lema (propiedades)

(a) $\Phi = \Phi(x,t)$ es de clase C^∞ $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$, $t>0$. Es singular en $(0,0)$.

(b) $\Phi = \Phi(x,t)$ es solución de la ec. del calor para $t>0$.

(c) $\forall\, t>0$, $\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x,t)\, dx = 1$.

Demostración (esbozo)

(a) Es claro de la def. ($\Phi \to \infty$ si $t \to 0$)

(b) Ejercicio de cálculo:

$$\partial_t \Phi = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-r^2/4t} \left(-\frac{n/2}{t} + \frac{r^2}{4t^2} \right)$$

$$r^2 = |x|^2$$

$$\Rightarrow \Delta \Phi = \partial_t \Phi.$$

(c) $\forall\ t>0$, fijo:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x,t)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-|x|^2/4t} dx$$

$$= \frac{1}{\pi^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|y|^2} dy = 1$$

$\square$

Teorema (solución al problema de Cauchy)

Sea $g \in C(\mathbb{R}^n)$, y acotada uniformemente:
$|g(x)| \le C$, con $C>0$, $\forall\ x \in \mathbb{R}^n$.
Definimos

$$u(x,t) := \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t)\, g(y)\, dy \quad \cdots (4)$$

$x \in \mathbb{R}^n$, $t>0$

$$= \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} g(y)\, dy$$

(a) $u \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$
(b) $u_t - \Delta u = 0 \quad \forall\ (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty)$
(c) $\displaystyle\lim_{\substack{(x,t)\to(x_0,0)\\ t>0}} u(x,t) = g(x_0), \quad \forall\ x_0 \in \mathbb{R}^n.$

Demostración:

Dado que:
- g unif. acotada
- $\Phi \in C^{\infty}\ \forall\ t>0$, fija
- $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x-y|^2/4t}\, dy$ converge unif. en x

$\Rightarrow$ podemos calcular derivadas de cualquier orden dentro de la integral.

$\therefore\ u \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$ y además

$$(\partial_t - \Delta)u = \int_{\mathbb{R}} \underbrace{(\partial_t - \Delta)\Phi(x-y,t)}_{=0 \text{ lema (b)}}\, g(y)\, dy$$
$$= 0$$

$\therefore$ (a) y (b) (para $t>0$).

(c): Sea $x_0 \in \mathbb{R}^n$, fijo. Sea $\epsilon>0$, por continuidad $\exists\ \delta>0$ tal que
$|g(y) - g(x_0)| < \epsilon$ si $|x-y| < \delta$, $y \in \mathbb{R}^n$.

Si $|x - x_0| < \delta/2$ entonces:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi \equiv 1$$

$$\downarrow$$

$$|u(x,t) - g(x_0)| \leq \int_{B_\delta(x_0)} \Phi(x-y,t)\,|g(y)-g(x_0)|\,dy + $$

$$+ \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\delta(x_0)} \Phi(x-y,t)\,|g(y)-g(x_0)|\,dy$$

$$\underset{|g|\leq C}{\leq} \epsilon \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t)\,dy}_{\equiv 1} + 2C \int_{\underline{\mathbb{R}^n} \setminus B_\delta(x_0)} \Phi(x-y,t)\,dy$$

Pero si $|x-x_0| < \delta/2$ y $|y-x_0| \geq \delta$
entonces

$$|y-x_0| \leq |x-y| + |x-x_0| < |x-y| + \frac{\delta}{2} \leq |x-y| + \frac{1}{2}|y-x_0|$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2}|y-x_0| < |x-y|$$

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\delta(x_0)} \frac{e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}}{(4\pi t)^{n/2}}\,dy \leq \frac{\tilde{C}}{t^{n/2}} \int_{|y-x_0|\geq \delta} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}\,dy$$

$$< \frac{\tilde{C}}{t^{n/2}} \int_{|x_0-y|\geq\delta} e^{-|x_0-y|^2/16t}\,dy$$

$$= \frac{\tilde{C}}{t^{n/2}} \int_\delta^{+\infty} e^{-r^2/16t}\, r^{n-1}\,dr$$

Dado que $\lim\limits_{t\to 0^+} \frac{1}{t^{n/2}} e^{-1/t} = 0$

tenemos que $\lim\limits_{t\to 0^+} t^{-n/2} \int_\delta^\infty e^{-r^2/16t}\, r^{n-1}\,dr = 0$

$\forall \; \delta > 0$ fijo.

(Prueba inducción sobre n; ejercicio)

Tomando $t \ll 1$ suf. pequeño:

$$\frac{\tilde{C}}{t^{n/2}} \int_{\delta}^{+\infty} e^{-r^2/4t} r^{n-1} \, dr \leq \frac{\epsilon}{C}$$

$$\Rightarrow \quad |u(x,t) - g(x_0)| \leq 2\epsilon \quad \text{si} \quad |x - x_0| < \frac{\delta}{2}$$

para t suf. pequeño. $\Rightarrow$ (c) $\square$

<u>observaciones:</u>

(A) Para la ecuación $u_t - D\Delta u = 0$ con $D > 0$, el núcleo del calor es

$$\Phi(x-y, t) = \frac{1}{(4\pi D t)^{n/2}} e^{-|x-y|^2/4Dt}$$

(B) Si $n = 1$ entonces

$$\Phi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-x^2/4t}$$

función densidad de probabilidad

Para cada $x \neq 0$ fijo tenemos que

$$\lim_{t \to 0^+} \Phi(x,t) = 0$$

si $x = 0$, $\lim_{t \to 0^+} \Phi(0,t) = \infty$

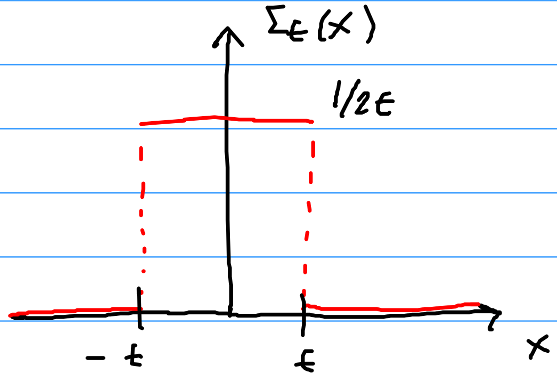
Ψ se comporta como una masa concentrada en $x=0$ si $t\to 0^+$ (distribución de Dirac) :

- $\delta(0)=\infty$
- $\delta(x)=0$ si $x\neq 0$
- $\int_{\mathbb{R}} \delta(x)\,dx = 1$

Función de Heaviside $\quad H(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x<0\end{cases}$

$$I_\epsilon(x) := \frac{1}{2\epsilon}\left(H(x+\epsilon)-H(x-\epsilon)\right)$$

$$= \begin{cases}\frac{1}{2\epsilon}, & -\epsilon\le x\le \epsilon\\ 0, & \text{otro caso}\end{cases}$$



$\forall \epsilon>0 \quad \int_{\mathbb{R}} I_\epsilon(x) = 1$.

Si $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R})$ entonces

$$\int_{\mathbb{R}} I_\epsilon(x)\varphi(x)\,dx = \frac{1}{2\epsilon}\int_{-\epsilon}^{\epsilon}\varphi(x)\,dx$$

$$\longrightarrow \varphi(0) \quad \text{si } \epsilon\to 0^+$$

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} I_\epsilon(x) = \begin{cases}0, & x\neq 0\\ \infty, & x=0\end{cases} = \delta_0(x)$$

Delta de Dirac: es un funcional en C_0^∞

$$\delta_0[\varphi] := \varphi(0) \qquad \forall\ \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$$

$$\langle \delta_0, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \delta_0(x)\varphi(x)\,dx$$

$$\langle \delta_y, \varphi \rangle = \varphi(y)$$

La sol. fundamental $\Phi(x-y,t)$ es solución de

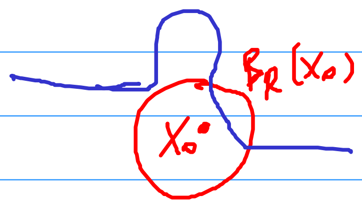
$$\begin{cases} (\partial_t - \partial_x^2)\Phi = 0 & \forall\ y \in \mathbb{R} \\ \Phi(x-y,0) = \delta_y(x) \end{cases}$$

$n \geq 1$:

$$\begin{cases} \Phi_t - \Delta\Phi = 0, & x \in \mathbb{R}^n,\ t>0 \\ \Phi(x-y,0) = \delta_y(x), & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

(c) Sea $g \in C(\mathbb{R}^n)$, acotada con $g \geq 0$, pero no idénticamente cero, $g \not\equiv 0$.

P. ej.



$$\begin{cases} g = 0 \ \forall\ x \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{B_R(x_0)} \\ g \geq 0, \quad g \not\equiv 0. \end{cases}$$

Entonces $u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t)\,g(y)\,dy$

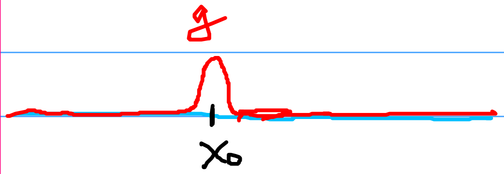
$$\geq \int_{B_{\frac{R}{2}}(x_0)} \underbrace{\Phi(x-y,t)}_{>0}\,\underbrace{g(y)}_{>0} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

$g > 0$ en $B_{\frac{R}{2}}(x_0)$

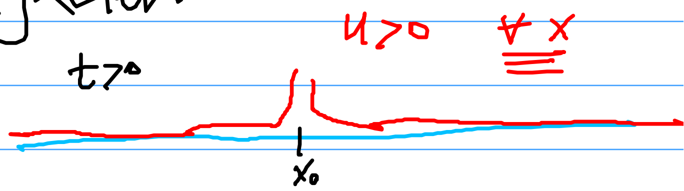
$u(x,t)$ es instantáneamente $(t>0)$ estrictamente positiva $\forall x \in \mathbb{R}^n$, en todo el espacio.

$\therefore$ velocidad infinita de propagación

$t=0$



$t>0$ $t>0$



(1) La solución encontrada <u>no</u> es única. Para obtener unicidad se imponen condiciones adicionales:

- $u(x,t) \leq A e^{a|x|^2}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\forall t \geq 0$, $A>0$, $a>0$

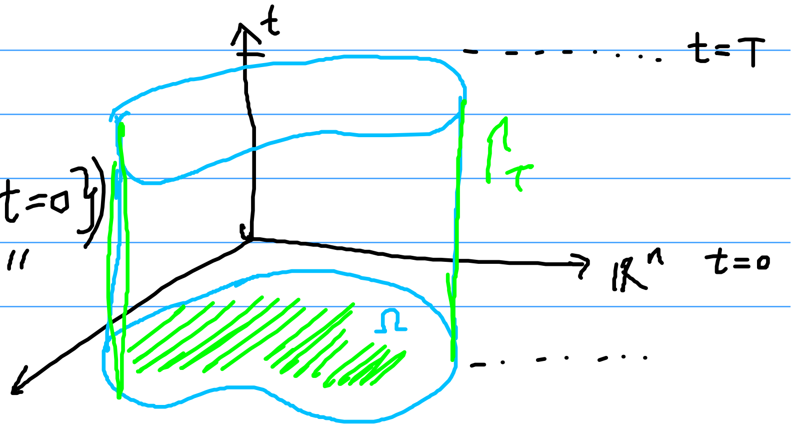
  (Tychonov)
- $u(x,t) > 0$ (Widder)

<u>Principio débil del máximo</u>

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$, abierto, acotado, $\partial\Omega$ C^1 por pedazos.

$$\begin{cases} \Omega_T := \Omega \times (0,T], & \text{con } T>0 \\ \Gamma_T := \overline{\Omega_T} \setminus \Omega_T & \end{cases}$$

$$= \underbrace{(\partial\Omega \times (0,T])}_{\text{"lados"}} \cup \underbrace{(\Omega \times \{t=0\})}_{\text{"base"}}$$



Teorema Sea $u \in C(\overline{\Omega_T})$ tal que $u_t, D_x^2 u$ existen en Ω_T, y u satisface

$$u_t \leq \Delta u \quad \text{en} \quad \Omega_T$$

Entonces,

$$\max_{\overline{\Omega_T}} u = \max_{\Gamma_T} u \qquad \dots (5)$$

Demostración Suponemos primero

$$u_t < \Delta u \quad \text{en} \quad \Omega_T$$

Sea $\Omega_{T,\epsilon} := \{ (x,t) \in \Omega_T : x \in \Omega, 0 < t < T-\epsilon \}$ abierto, con $\epsilon > 0$.

$u \in C(\overline{\Omega_{T,\epsilon}}) \Rightarrow \exists \ (x_m, t_m) \in \overline{\Omega_{T,\epsilon}}$ tal que

$$u(x_m, t_m) = \max_{\overline{\Omega_{T,\epsilon}}} u$$

Si $(x_m, t_m) \in \Omega_{T,\epsilon}$ (abierto) entonces

$$\begin{cases} u_t(x_m, t_m) = 0, \quad \nabla u(x_m, t_m) = 0 \\ \Delta u \big|_{(x_m, t_m)} \leq 0 \quad (\text{máximo}) \end{cases}$$

contradicción con $u_t(x_m, t_m) < \Delta u(x_m, t_m)$

$\therefore (x_m, t_m) \in \partial \Omega_{T,\epsilon}$ y además

$$\max_{\overline{\Omega_{T,\epsilon}}} u = \max_{\partial\Omega_{T,\epsilon}} u \leq \max_{\Gamma_T} u$$

ya que $\partial\Omega_{T,\epsilon} \subset \Gamma_T$.

Todo punto en $\overline{\Omega_T}$ con $t < T$ pertenece a cierto Ω_{T,ϵ_0} para cierto $\epsilon_0 > 0$. Por continuidad en $\overline{\Omega_T}$

$$\sup_{\epsilon \in [0,T)} \max_{\overline{\Omega_{T,\epsilon}}} u \overset{(*)}{=} \max_{\overline{\Omega_T}} u \leq \max_{\Gamma_T} u$$

$(*)$: Por un lado $\max_{\overline{\Omega_{T,\epsilon}}} u \leq \max_{\overline{\Omega_T}} u$ $\forall \epsilon \in [0,T)$

Por otro lado: si $\sup_{\epsilon \in [0,T)} \max_{\overline{\Omega_{T,\epsilon}}} u < \max_{\overline{\Omega_T}} u$

entonces $\exists\ \epsilon_1 > 0$ tal que $\epsilon_1 \in [0,T]$ y $\max_{\overline{\Omega_{T,\epsilon_1}}} u > \max_{\overline{\Omega_T}} u$ ¡ por continuidad.

$$\therefore \max_{\overline{\Omega_T}} u \leq \max_{\Gamma_T} u$$

Para el caso general: $u_t \leq \Delta u$ en Ω_T

$$v(x,t) := u(x,t) - \delta t \quad , \quad \delta > 0$$

$$\Rightarrow \quad v_t - \Delta v = u_t - \Delta u - \varepsilon < 0$$

Aplicando caso anterior a v:

$$\begin{aligned}
\max_{\overline{\Omega}_T} u &= \max_{\overline{\Omega}_T} (v + \varepsilon t) \\
&\leq \max_{\overline{\Omega}_T} v + \varepsilon T \\
&\overset{*}{\leq} \max_{\Gamma_T} v + \varepsilon T \\
&\leq \max_{\Gamma_T} u + \varepsilon T
\end{aligned}$$

Tomando lím cuando $\varepsilon \to 0^+$ obtenemos el resultado.

$\square$