Lección 3.1: Ecuación de Laplace: solución fundamental.

Estudiaremos ecuaciones de la forma:

$$-\Delta u = f, \qquad \cdots \quad (1)$$

para $x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, Ω abierto, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ función conocida, $\Delta u = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}$.

Si $f \equiv 0$, la ecuación (1) se conoce como ecuación de Laplace.

Si $f \not\equiv 0$, (1) se conoce como ecuación de Poisson.

Además de (1) consideraremos condiciones de frontera:

(a) Dirichlet : $u = g$ sobre $\Gamma \subseteq \partial\Omega$

(b) Neumann : $\partial_\nu u = \nabla u \cdot \hat{\nu} = g$ sobre $\Gamma \subseteq \partial\Omega$

$\hat{\nu}$ – vector normal unitario en cada punto de $\partial\Omega$

(c) Robin : $u + \beta \partial_{\hat{\nu}} u = g$ sobre $\Gamma \subseteq \partial\Omega$

con $\beta = \beta(x)$ continua, $\beta(x) > 0$ $\forall\, x \in \partial\Omega$.

Ejemplos :

(A) Electrostática (estudio del campo eléctrico en reposo).

Ec. de Maxwell $\Rightarrow$ $\nabla \times \vec{E} = 0$ (no hay cargas)

$\Rightarrow$ $\vec{E} = -\nabla \phi$

ϕ = potencial electrostático.

Maxwell $\Rightarrow$ $\operatorname{div} \vec{E} = \dfrac{\rho(x)}{\epsilon}$

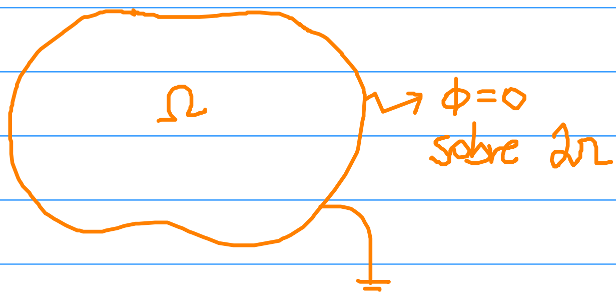
ρ - densidad de carga eléctrica.

$\epsilon > 0$ constante

Sustituyendo $-\Delta \phi = \dfrac{\rho}{\epsilon}$ (Poisson).

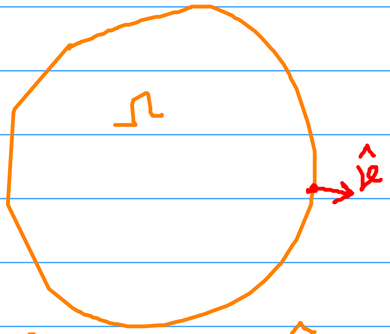
Resolviendo $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$, abierto, acotado.

(a) Dirichlet : $\phi = 0$ sobre $\partial\Omega$



Especifica el potencial sobre $\partial\Omega$ (conductor)

(b) Neumann : $\partial_\nu \phi = 0$ sobre $\partial\Omega$



No flujo de $\vec{E}$ sobre $\partial\Omega$.

$$\partial_\nu \phi = \nabla\phi \cdot \hat{\nu} = -\vec{E}\cdot\hat{\nu} = 0$$

(B) Fluido $\boxed{\text{irrotacional}}$ incompresible estacionario

$\bar{u} = \vec{u}(x,t) \in \mathbb{R}^3$ campo de velocidades de un fluido (Euler).

$x \in \mathbb{R}^3,\ t > 0$

Flujo estacionario : $\vec{u}_t = 0$.

$\therefore \quad \bar{u} = \bar{u}(x)$

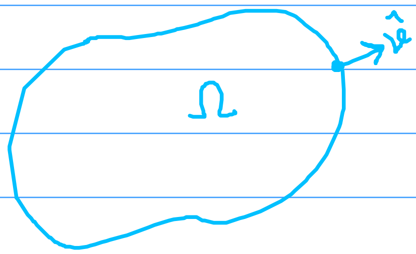
Fluido incompresible : $\operatorname{div} \bar{u} = 0$

$$\left(\rho_t + \operatorname{div}(\rho\vec{u}) = 0 \underset{\rho \text{ const.}}{\Rightarrow} \operatorname{div} \bar{u} = 0 \right)$$

Flujo irrotacional : $\nabla \times \vec{u} = 0$
(no hay vórtices)

$\nabla \times \vec{u} = 0 \Rightarrow \exists\ \psi = \psi(x)$ tal que $\vec{u} = -\nabla\psi$ ψ - potencial

$\operatorname{div} \vec{u} = 0 \Rightarrow -\Delta\psi = 0$ (Ec. de Laplace)



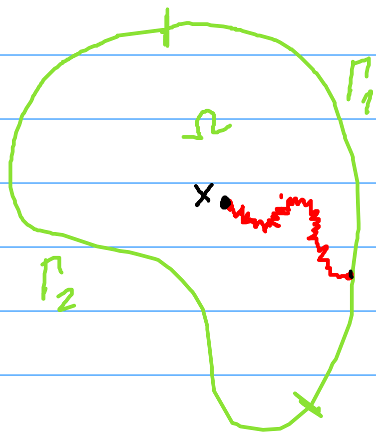
condición de no flujo

$$\partial_\nu \psi = -\bar{u}\cdot\hat{\nu} = 0$$

(c) Movimiento browniano.

$\Omega \subset \mathbb{R}^3$, "contenedor", (abierto y acotado)

$\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$



Partícula se mueve aleatoriamente dentro de Ω. Si llega a $\partial\Omega$, entonces se detiene.

$u(x)$ = probabilidad de que la partícula iniciando en $x \in \Omega$, termine en un punto de Γ_1.

u se puede aproximar por la solución a:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } \Omega \\ u = 1 & \text{sobre } \Gamma_1 \\ u = 0 & \text{sobre } \Gamma_2 \end{cases}$$

Solución fundamental

Buscaremos soluciones de

$$-\Delta u = 0, \qquad x \in \mathbb{R}^n \qquad \cdots (1)$$

$n \geq 2$.

Proposición La ecuación de Laplace (1) es invariante bajo rotaciones, es decir, si $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una rotación, $M^T M = I$ y $v(x) := u(Mx)$ entonces $\Delta u = 0$ si y sólo si $\Delta v = 0$.

Dem. Ejercicio (Tarea 3).

Por lo tanto buscaremos soluciones de la forma $u(x) = \phi(|x|)$.

Notación $r := |x| \geq 0$

$$r^2 = \sum_{j=1}^{n} x_j^2 \quad \Rightarrow \quad r_{x_j} = \frac{x_j}{r} \quad \text{si } |x| \neq 0$$

Regla de la cadena:

$$u_{x_j} = \phi'(r)\, r_{x_j} = \phi'(r) \frac{x_j}{r}$$

$$u_{x_j x_j} = \phi''(r) \frac{x_j^2}{r} + \phi'(r)\left(\frac{1}{r} - \frac{x_j^2}{r^3}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \Delta u = \frac{(n-1)}{r}\phi'(r) + \phi''(r) = 0, \qquad r>0 \qquad \cdots (2)$$

Ec. dif. ordinaria para $\phi = \phi(r)$, $r>0$.

Suponiendo $\phi'(r) \neq 0$ la solución general de (2) es de la forma

$$\phi'(r) = \frac{C}{r^{n-1}}, \qquad r>0$$

con C constante. Integrando:

$$u(x) = \phi(|x|) = \begin{cases} C_1 \log|x| + C_2, & n=2 \\ C_3 |x|^{2-n} + C_4, & n\geq 3 \end{cases}$$

$\forall\, x \in \mathbb{R}^n$, $x\neq 0$, C_j constantes.

Familia de soluciones, $u \in C^\infty$ si $x\neq 0$.

<u>Definición</u> La función $\Phi(x): \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida mediante

(3)... $$\Phi(x) := \begin{cases} -\frac{1}{2\pi}\log|x|, & \text{si } n=2 \\ \frac{1}{(n-2)\,\omega_n}\cdot\frac{1}{|x|^{n-2}}, & \text{si } n\geq 3 \end{cases}$$

es la <u>solución fundamental del Laplaciano</u>

ω_n = área de la frontera de la bola unitaria en $\mathbb{R}^n$

$$\omega_n = |\partial B_1(0)| = \int_{\partial B_1(0)} dS_x = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$$

$$B_1(0) = \{ x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1 \}$$

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-y} y^{s-1} \, dy$$

claramente $\omega_2 = 2\pi$, $\omega_3 = 4\pi$, etc.

$$B_R(0) = \{ x \in \mathbb{R}^n : |x| < R \}$$

$$|B_R| = \frac{\omega_n}{n} R^n \quad \text{volumen}$$

$$|\partial B_R(0)| = \omega_n R^{n-1} \quad \text{superficie.}$$

$\Phi(x)$ es C^∞ si $x \neq 0$.

$\Phi(x)$ es singular en $x=0$. Sin embargo, Φ es integrable en cualquier bola con centro en $x=0$.

Lema 1: La solución fundamental definida en (3) es integrable en $B_r(0) \subset \mathbb{R}^n$, $\forall\, r>0$. Más precisamente,

(4) ...
$$\int_{B_r(0)} |\Phi(x)| \, dx \leq \begin{cases} C r^2 |\log r|, & n=2 \\ C r^2, & n \geq 3 \end{cases}$$

donde $C = C(n) > 0$ es una constante.

Demostración: Caso $n \geq 3$. Sea $r>0$ arbitrario, sea $0<\delta<r$. Por definición,

$$\int_{B_r(0)} \Phi(x)\, dx = \lim_{\delta \to 0^+} \int_{B_r(0) \setminus \overline{B_\delta(0)}} \Phi(x)\, dx$$

si el límite existe. Calculando:

$$\int_{B_r(0)\setminus\overline{B_\delta(0)}} \Phi(x)\, dx = \frac{1}{(n-2)\omega_n} \int_{\{\delta<|x|<r\}} \frac{dx}{|x|^{n-2}}$$

$$= \frac{1}{(n-2)\omega_n} \int_\delta^r \Big(\underbrace{\int_{\{|x|=\rho\}} dS_x}_{=|\partial B_\rho(0)| = \omega_n \rho^{n-1}} \Big) \frac{d\rho}{\rho^{n-2}}$$

$$= \frac{1}{n-2} \int_\delta^r \rho\, d\rho = \frac{1}{2(n-2)} (r^2-\delta^2) \xrightarrow[\delta \to 0^+]{} \frac{r^2}{2(n-2)}$$

$\Phi(x) = |\Phi(x)|$ obtenemos

$$\int_{B_r(0)} |\Phi(x)|\, dx \leq C(n) r^2$$

con $C(n) = \dfrac{1}{2(n-2)}$.

El caso $n=2$: ejercicio $\square$

<u>Lema 2</u> : Sea $y \in \mathbb{R}^n$, fijo. Entonces :

(a) $\Delta_x \Phi(x-y) = 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n,\ x \neq y.$

(b) Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, abierto y acotado tal que $y \in \Omega$. Entonces para toda función $\varphi \in C_0^2(\Omega)$ se tiene que

$$(5) \cdots \quad -\int_\Omega \Phi(x-y)\, \Delta_x \varphi(x)\, dx = \varphi(y).$$

Demostración : Por construcción de la solución fundamental

$$\Delta_x \Phi(x-y) = 0 \qquad \text{si } x \neq y.$$

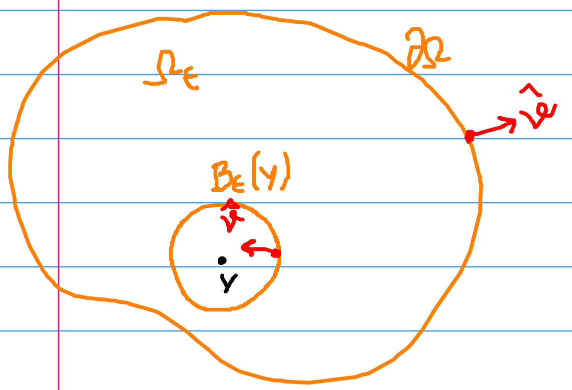
$\left(\Delta_x \Phi(x) = 0 \text{ si } x \neq 0. \right)$ Esto prueba (a).

Sea $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(y) \subset \Omega$. Definimos $\Omega_\varepsilon := \Omega \setminus \overline{B_\varepsilon(y)}$, abierto. Aislamos la singularidad de $\Phi(x-y)$: para $y \in \Omega$ fijo, $\Phi(x-y)$ es una función <u>armónica</u> (es decir, $\Delta_x \Phi(x-y) = 0$) en Ω_ε.

Sea $\varphi \in C_0^2(\Omega)$ arbitraria. Por la identidad de Green,

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \Phi(x-y)\, \Delta_x \varphi(x)\, dx = \int_{\Omega_\varepsilon} \Big[\Phi(x-y)\, \Delta_x \varphi(x) - \varphi(x) \underbrace{\Delta_x \Phi(x-y)}_{=0\ \forall\, x \in \Omega_\varepsilon} \Big] dx$$

$$\underset{\substack{\downarrow \\ \text{Green}}}{=} \int_{\partial\Omega_\epsilon} \left[\Phi(x-y)\frac{\partial\varphi}{\partial\nu_x} - \varphi(x)\frac{\partial}{\partial\nu_x}\left(\Phi(x-y)\right)\right] dS_x$$



$\partial\Omega_\epsilon = \partial\Omega \cup \partial B_\epsilon(y)$

$\varphi \in C_0^2(\Omega) \Rightarrow \begin{matrix} \varphi = 0 \\ \partial_\nu \varphi = 0 \end{matrix}$ sobre $\partial\Omega$

$$\Rightarrow I_\epsilon(y) := \int_{\Omega_\epsilon} \Phi(x-y)\Delta_x\varphi\, dx = -\int_{\partial B_\epsilon(y)} \left[\Phi(x-y)\frac{\partial\varphi}{\partial\nu} - \varphi(x)\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\Phi(x-y)\right)\right] dS_x$$

cambio de variables: $\quad x = y + \rho\eta, \quad |\eta| = 1$

$$0 < \rho \leq \epsilon$$

Si $\rho = \epsilon$ entonces $x \in \partial B_\epsilon(y)$, es decir, $|x-y| = \epsilon$.
Sobre $\partial B_\rho(y)$ tenemos que

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right|_{x=y+\rho\eta} = \left(\nabla\varphi\cdot\hat{\nu}\right)_{|x=y+\rho\eta}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \varphi_{x_j}(y+\rho\eta)\,\eta_j \quad \longrightarrow \nu = \eta$$

$$= \frac{\partial}{\partial\rho}\left(\varphi(y+\rho\eta)\right)$$

sustituyendo en la integral:

$$I_\epsilon(y) \underset{\substack{\downarrow \\ dS_x = \epsilon^{n-1}dS_\eta \\ x = y+\epsilon\eta}}{=} -\int_{|\eta|=1} \epsilon^{n-1}\left[\Phi(\epsilon\eta)\frac{\partial\varphi}{\partial\nu} - \varphi(y+\epsilon\eta)\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\Phi(\epsilon\eta)\right)\right] dS_\eta$$

caso $n \geq 3$

$$= \frac{-\epsilon^{n-1}}{(n-2)\omega_n} \int_{|\eta|=1} \left[\frac{1}{\rho^{n-2}} \frac{\partial}{\partial \rho} \varphi(y+\rho\eta) - \varphi(y+\rho\eta) \underbrace{\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{1}{\rho^{n-2}}\right)}_{= \frac{-(n-2)}{\rho^{n-1}}} \right]\Bigg|_{\rho=\epsilon} dS_\eta$$

$$= \frac{-\epsilon}{(n-2)\omega_n} \int_{|\eta|=1} \left(\frac{\partial \varphi(y+\rho\eta)}{\partial \rho} \right)\Bigg|_{\rho=\epsilon} dS_\eta \; +$$

$$- \frac{1}{\omega_n} \int_{|\eta|=1} \varphi(y+\epsilon\eta)\, dS_\eta$$

$$\longrightarrow -\varphi(y) \qquad \text{si } \epsilon \to 0^+$$

Por otro lado, por el lema 1, $\Phi(x-y)$ es integrable en $B_\epsilon(y)$. Podemos calcular

$$\int_\Omega \Phi(x-y)\Delta_x\varphi\, dx = \int_{\Omega_\epsilon} \Phi(x-y)\Delta_x\varphi\, dx + \int_{B_\epsilon(y)} \Phi(x-y)\Delta_x\varphi\, dx$$

$$= \underbrace{I_\epsilon(y)}_{\to -\varphi(y)} + \underbrace{\int_{B_\epsilon(y)} \Phi(x-y)\Delta_x\varphi\, dx}_{\xrightarrow{\epsilon\to 0^+} 0}$$

$\varphi \in C_0^2(\Omega) \Rightarrow \varphi, \nabla\varphi, \Delta\varphi$ son acotadas en $B_\epsilon(y)$

$\therefore$ podemos estimar

$$\left| \int_{B_\epsilon(y)} \Phi(x-y)\Delta_x\varphi\, dx \right| \leq C \left| \int_{B_\epsilon(y)} \Phi(x-y)\, dx \right|$$

$$\leq C \int_{B_\epsilon(y)} |\Phi(x-y)|\, dx$$

$$= \begin{cases} O(\epsilon^2), & n \geq 3 \\ O(\epsilon^2)|\log\epsilon|, & n = 2 \end{cases}$$

Así, $\left| \int_{B_\epsilon(y)} \Phi(x-y)\Delta_x \varphi \, dx \right| \to 0$ si $\epsilon \to 0^+$.

De hecho (ejercicio), $I_\epsilon(y) \to -\varphi(y)$ cuando $\epsilon \to 0^+$ si $n=2$.

Tomando el límite:

$$-\int_\Omega \Phi(x-y)\Delta_x \varphi \, dx = \varphi(y) \qquad \square$$

Interpretación:

$$\text{“}\ \Delta_x \Phi(x-y) = \delta_y(x) = \begin{cases} 0 & x \neq y \\ \infty & x = y \end{cases}\ \text{”}$$

Heurísticamente si integramos por partes

$$\text{“}\ \int_\Omega \underbrace{\Delta_x \Phi(x-y)}_{=0} \varphi(x)\, dx = \varphi(y)\ \text{”}$$

Gracias a la singularidad en $x=y$ la integral no es cero, a pesar de que $\Delta_x \Phi(x-y) = 0$ si $x \neq y$. Es decir,

$$\langle \Delta_x \Phi(x-y), \varphi \rangle := \int_\Omega \Delta_x \Phi(x-y) \varphi(x)\, dx$$

$$= \varphi(y) \qquad y \in \Omega$$

$\forall\ \varphi \in C_0^\infty(\Omega) = \mathcal{D}(\Omega)$

Una distribución es un funcional lineal en $\mathcal{D}(\Omega) = C_0^\infty(\Omega)$.

$$\begin{cases} \delta_y : \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R} & \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \\ \delta_y[\varphi] := \langle \delta_y, \varphi \rangle := \varphi(y) \end{cases}$$

" $\Delta_x \Phi(x-y) = \delta_y$ "