Lección 1.8: Introducción a leyes de conservación, parte II: solución débil, condición de Rankine-Hugoniot

Problema de Cauchy:

$$(1) \cdots \begin{cases} u_t + f(u)_x = 0, & x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$a(u) = f'(u), \quad f \in C^2, \quad u_0 \in C^1, \quad |u_0|, |u_0'| \leq C \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$\alpha(x) := a(u_0(x))$, es no decreciente $\Rightarrow$ $T_* = \infty$

Otro caso: $\infty > T_* = -\dfrac{1}{\inf_{x \in \mathbb{R}} \frac{d}{dx}(a(u_0(x)))} > 0$

$\exists$ $u \in C^1((0,T_*);\mathbb{R}) \cap C([0,T_*);\mathbb{R})$ solución de (1).

Observaciones:

(i) $T_* > 0$ se conoce como "tiempo de rompimiento". Si $T_* = \infty$ la solución es <u>global</u> $u \in C^1((0,\infty);\mathbb{R}) \cap C([0,\infty);\mathbb{R})$.

(ii) Si la ecuación es <u>lineal</u> $a'(u) = f''(u) \equiv 0$ $\forall u \in \mathbb{R}$. En ese caso $\alpha'(x) \equiv 0$ y $T_* = \infty$.

(iii) El fenómeno de rompimiento a tiempo finito $0 < T_* < \infty$ es exclusivo de ecuaciones no lineales. $\alpha'(y) < 0 \Rightarrow a'(u) \neq 0$.

(iv) Si $u_0 = u_0(x) \in C^1$ es tal que $\alpha(x) = a(u_0(x))$ es no decreciente ($\alpha'(x) \geq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$) entonces la solución es global $T_* = \infty$

$\frac{d}{dx}(a(u_0(x))) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

¿Podemos extender la solución de clase C^1 para $t \geq T_*$? No.

Supongamos $f \in C^3$, $C^2 \ni u = u(x,t)$, $(x,t) \in \mathbb{R} \times (0,T)$ con $T > 0$ es solución del prob. de Cauchy (1).
Si $T_* = \infty$ entonces claramente $T < T_*$.
Caso interesante: $0 < T_* < \infty \Rightarrow \exists\ y \in \mathbb{R}$ tales que $\alpha'(y) = a'(u_0(y))u_0'(y) < 0$. Sea $y_* \in \mathbb{R}$ uno de dichos valores. Recta característica que pasa por $(y_*, 0)$:

$$\hat{x}(t) = a(u_0(y_*))\, t + y_*.$$

u cte. sobre carac.

Sea $v(x,t) := a'(u)u_x$, $(x,t) \in \mathbb{R} \times (0,T)$.
Calculamos:

$$\frac{d}{dt} v(\hat{x}(t),t) = \left(a'(u)u_{xx} + a''(u)u_x^2\right)a(u) + a'(u)u_{xt} + a''(u)u_x u_t$$
$$= a'(u)a(u)u_{xx} + a''(u)a(u)u_x^2 + a'(u)u_{xt} + a''(u)u_x u_t$$

$u \in C^2$, solución de (1): $\quad u_t + a(u)u_x = 0$
$$\Rightarrow \quad u_{xt} + a'(u)u_x^2 + a(u)u_{xx} = 0.$$

sustituyendo

$$\frac{d}{dt} v(\hat{x}(t),t) = a'(u)\left(u_{xt} + a(u)u_{xx}\right) = -a'(u)^2 u_x^2$$
$$= -v^2$$

$$V(t) := v(\hat{x}(t), t)$$

$$\therefore \quad \frac{dV}{dt} = -V^2, \quad V(0) = v(\hat{x}(0), 0)$$
$$= a'(u_0(y_*))u_0'(y_*)$$
$$= \alpha'(y_*) < 0.$$

calculando por sep. de variables:

$$V(t) = \frac{1}{t + \frac{1}{\alpha'(y_*)}}$$

claramente V existe sólo si $t < -\frac{1}{\alpha'(y_*)} < T_*$

$\therefore \quad T < T_*$.

Conclusión: no se puede extender para $t \geq T_*$

Solución débil

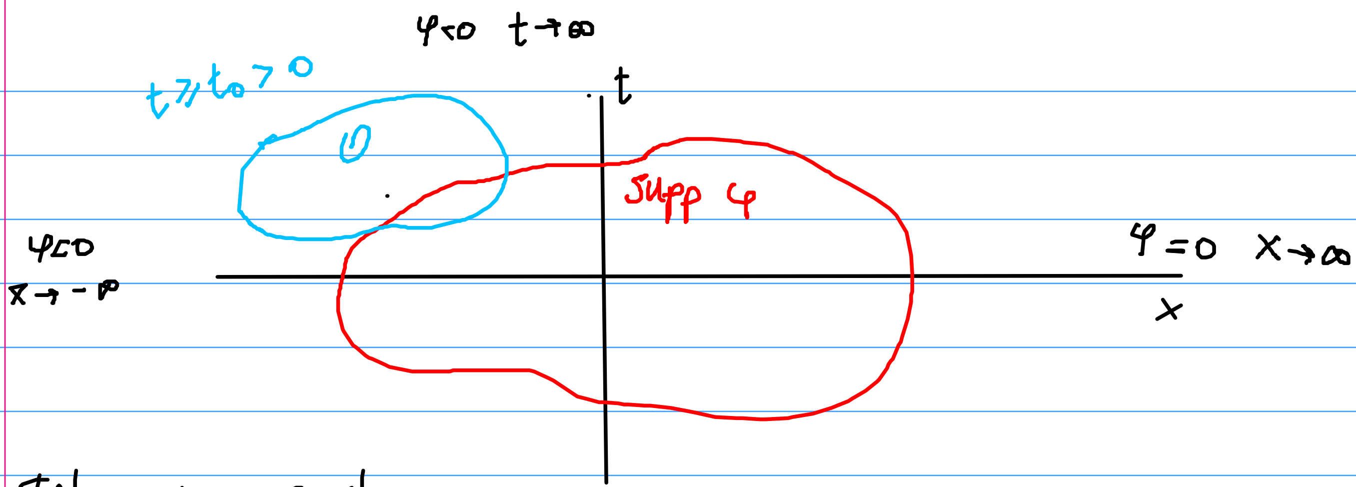
Supongamos que $u \in C^1(\mathbb{R} \times (0, \infty))$ es solución de (1). Función de prueba:

$$\varphi \in \mathcal{D} := C_0^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}; \mathbb{R})$$
$$\varphi = \varphi(x,t)$$
$$\left(\varphi \in C^\infty, \quad \underline{\varphi \text{ tiene soporte compacto}} \right)$$
$$\operatorname{supp} \varphi = \overline{\{(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \varphi(x,t) \neq 0\}}$$

Mult. (1) por φ, integramos en $(x,t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty)$:

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \left(\varphi u_t + \varphi f(u)_x \right) dx\, dt = 0.$$

int. por partes.



Int. por partes :

$$0 = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} (\varphi u)_t + (\varphi f(u))_x \, dx\, dt \; +$$

$$- \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \varphi_t u + \varphi_x f(u) \, dx\, dt$$

$$= \int_{\mathbb{R}} (\varphi u)\Big|_{t=0}^{t=\infty} dx + \underbrace{\int_0^\infty (\varphi f(u))\Big|_{x=-\infty}^{x=\infty} dt}_{=0} \; +$$

$$- \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \varphi_t u + \varphi_x f(u) \, dx\, dt$$

$$= - \int_{\mathbb{R}} \varphi(x,0) u(x,0)\, dx - \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \varphi_t u + \varphi_x f(u)\, dx dt$$

$u(x,0) = u_0(x)$ $\therefore$

$$(2) \;\; \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \varphi_t u + \varphi_x f(u)\, dx\, dt + \int_{\mathbb{R}} \varphi(x,0) u_0(x)\, dx = 0$$

(2) tiene sentido incluso si u es simplemente acotada : $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times [0,\infty))$ = "acotada"

Definición : Una función $u = u(x,t)$ acotada ($u \in L^\infty(\mathbb{R} \times [0,\infty))$) es una solución débil del problema de Cauchy (1) si u satisface (2) para toda función de prueba $\varphi \in \mathcal{D} = C_0^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}; \mathbb{R})$.

observaciones:

(a) Por construcción toda solución de (1) de clase C^1 es solución débil.

(b) Suponemos que tomamos $\varphi \in \mathcal{D}$ tal que $\operatorname{supp} \varphi \subset \mathcal{O} \subset \{ t \geq t_0 > 0 \}$. Por lo tanto:

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \varphi_t u + \varphi_x f(u) \, dx \, dt = 0.$$

(c) Si u es sol. débil y además es de clase C^1 en una región abierta $R \subset \mathbb{R} \times (\delta, \infty)$ entonces

$\delta > 0$, u es solución clásica en R, es decir,

$$u_t + f(u)_x = 0 \quad \text{en } R$$

Si tomamos $\varphi \in \mathcal{D}$ tal que $\operatorname{supp} \varphi \subset R$ entonces

$$0 = \int_R \varphi_t u + \varphi_x f(u) \, dx \, dt = - \int_R \varphi (u_t + f(u)_x) \, dx \, dt$$

$\forall \varphi \in \mathcal{D}$ con $\operatorname{supp} \varphi \subset R$.

$$\Rightarrow \quad u_t + f(u)_x = 0 \quad \text{en } R.$$

(d) Sea $R = \mathbb{R} \times (0, \infty)$ mult. por $\varphi \in \mathcal{D}$ entonces int. por partes:

$$0 = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} (u_t + f(u)_x) \varphi \, dx \, dt$$

$$= - \int_{\mathbb{R}} \varphi(x,0) u(x,0) \, dx - \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} u\varphi_t + f(u) \varphi_x \, dx \, dt$$

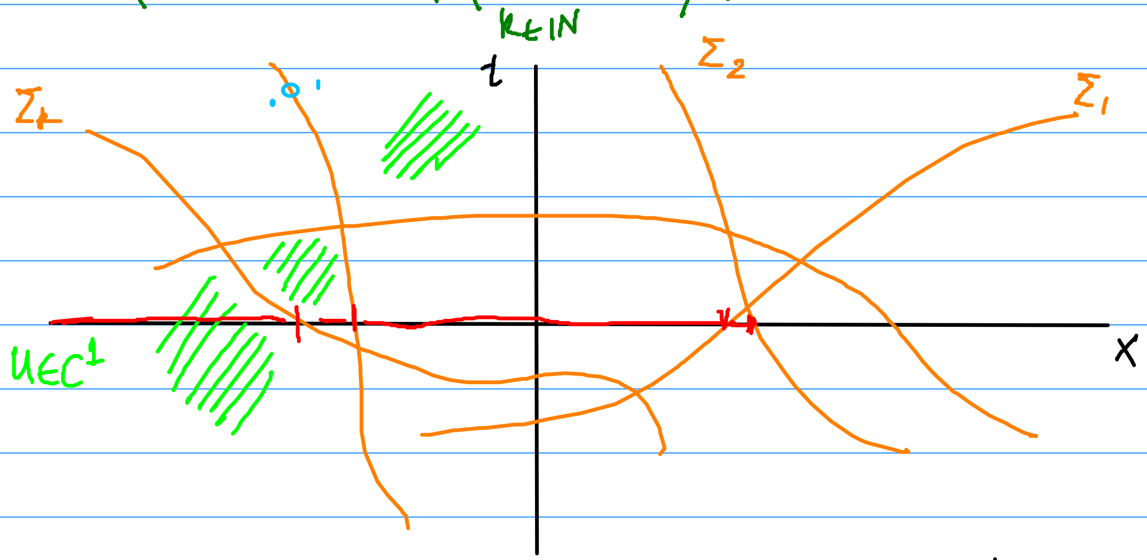
$$\underset{\substack{u \text{ sol. débil} \\ (2)}}{=} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x,0) (u(x,0) - u_0(x)) \, dx \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty$$

$$\Rightarrow \quad u(x,0) = u_0(x).$$

La noción de sol. débil recupera la noción de solución "clásica".

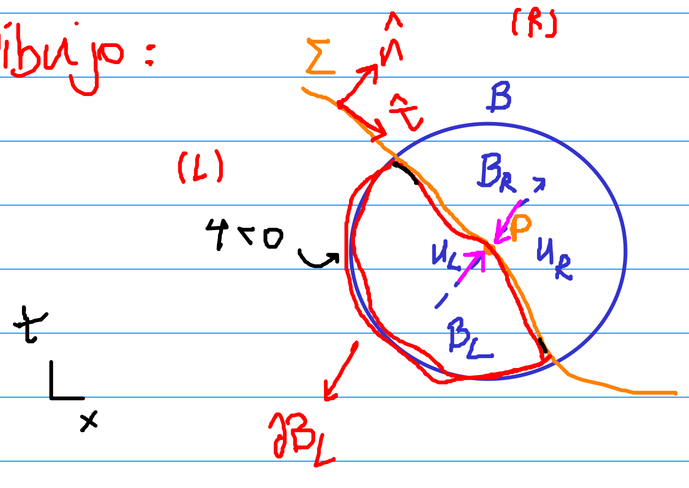
<u>Definición</u> La clase de soluciones débiles C^1 por pedazos consiste en soluciones débiles $u \in L^\infty(\mathbb{R}\times(0,\infty))$ tales que tienen, a lo más, un conjunto numerable de discontinuidades fuera de las cuales u es de clase C^1.

$\exists\ \Sigma_k,\ k\in\mathbb{N}$ curvas en $(x,t)\in\mathbb{R}\times[0,\infty)$ donde u es discontinua en Σ_k y $u\in C^1\left(\mathbb{R}\times(0,\infty)\setminus\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\Sigma_k\right)\right)$.



<u>No toda discontinuidad es admisible</u>: <u>condición de Rankine-Hugoniot</u> o <u>condición de salto</u>

Dibujo:



Sea u sol. débil de clase C^1 por pedazos.
Sea Σ una discontinuidad de u.

Parametrización:

$$\Sigma = \{ (\tilde{x}(s), \tilde{t}(s)) \in \mathbb{R}\times(0,\infty) \ : \ s \in I \subset \mathbb{R} \}$$

donde $\tilde{x}, \tilde{t} \in C^1(I)$, $\tilde{t}(s) \geq \delta > 0 \quad \forall s \in I$
$\tilde{x}'(s)^2 + \tilde{t}'(s)^2 \neq 0 \quad \forall s \in I$.

Por convención el vector normal unitario en cada punto de Σ apunta al lado "derecho" de Σ.

$$\hat{n}(s) = \frac{1}{\sqrt{\tilde{x}'(s)^2 + \tilde{t}'(s)^2}} \begin{pmatrix} \tilde{t}'(s) \\ -\tilde{x}'(s) \end{pmatrix}$$

Sea $P = (x,t) \in \Sigma$, fijo. Por ser u de clase C^1 por pedazos, $u \in C^1$ en una vecinad de P menos en Σ, $u \in C^1(B \setminus \Sigma)$

$\forall (x,t) \in \Sigma$ arbitrario

$$u_R = \lim_{\varepsilon \to 0^+} u\big((x,t) + \varepsilon \hat{n}\big)$$

$$u_L = \lim_{\varepsilon \to 0^+} u\big((x,t) - \varepsilon \hat{n}\big)$$

límites existen pues $u \in C^1$ excepto en Σ.

B bola centrada en P, con radio suf. pequeño tal que u es C^1 fuera de $\Sigma \cap B$, y B no intersecta al eje x, $B \subset \{(x,t),\ t \geq \delta > 0\}$.

$B = B_L \cup B_R$ dos componentes abiertos, B_L, B_R

Sea $\varphi \in C_0^\infty(B; \mathbb{R}) \subset \mathcal{D}$, $\quad \operatorname{supp} \varphi \subset B$
$B \subset \{t > 0\}$ entonces $\varphi(x,0) \equiv 0$.

u solución débil:

$$\int_B \varphi_t u + \varphi_x f(u) \, dx\, dt = 0.$$

$$= \int_{B_L} \varphi_t u + \varphi_x f(u)\, dx\, dt + \int_{B_R} \varphi_t u + \varphi_x f(u)\, dx$$

$$=: I_L + I_R.$$

$u \in C^1(B_L)$, $\in C^1(B_R)$ $\Rightarrow$ u es sol. clásica en B_L y B_R.

$$I_L = \int_{B_L} (\varphi u)_t + (\varphi f(u))_x \, dx\, dt$$

$$- \int_{B_L} \varphi \underbrace{\left(u_t + f(u)_x \right)}_{=0} dx\, dt$$

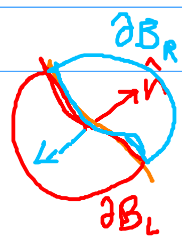
$$= \int_{\partial B_L} \varphi \begin{pmatrix} f(u) \\ u \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{n}_x \\ \hat{n}_t \end{pmatrix} d\sigma$$

$\hat{n}$ normal exterior a ∂B_L.

Sobre el segmento de ∂B_L que coincide con ∂B $\varphi \equiv 0$.

$$\therefore \quad I_L = \int_{\Sigma \cap B} \varphi \begin{pmatrix} f(u) \\ u \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{n}_x \\ \hat{n}_t \end{pmatrix} d\sigma$$

Sobre Σ, $\begin{pmatrix} \hat{n}_x \\ \hat{n}_t \end{pmatrix} = \hat{n}$ vector normal a Σ



Análogamente la normal sobre $\Sigma \cap B$ es $-\hat{n}$

$$I_R = -\int_{\Sigma\cap B} \varphi \begin{pmatrix} f(u) \\ u \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{n}_x \\ \hat{n}_t \end{pmatrix} d\sigma$$

$\therefore \quad 0 = I_L + I_R$

$$= \int_{\Sigma\cap B} \varphi \left[\hat{n}_t (u_L - u_R) + \hat{n}_x \left(f(u_L) - f(u_R) \right) \right] d\sigma$$

válida $\forall\ \varphi \in \mathcal{D}$ tal que $\operatorname{supp} \varphi \subset B$.

$\Rightarrow$ condición de salto de Rankine-Hugoniot

$$\boxed{(3) \cdots \quad \hat{n}_t (u_R - u_L) + \hat{n}_x \left(f(u_R) - f(u_L) \right) = 0 \quad \text{sobre } \Sigma}$$

$\forall\ g(u) \qquad [\![g]\!] := g(u_R) - g(u_L)$ sobre Σ.

$$\Rightarrow \qquad \hat{n}_t [\![u]\!] + \hat{n}_x [\![f(u)]\!] = 0 \quad \cdots \quad (3')$$

observaciones:

(a) La condición de RH (3) expresa la conservación de u a través de Σ.

(b) Sustituyendo $\hat{n} = \dfrac{1}{\sqrt{(\,'')}} \begin{pmatrix} \tilde{t}'(s) \\ -\tilde{x}'(s) \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \qquad -\frac{d\tilde{x}}{ds} [\![u]\!] + \frac{d\tilde{t}}{ds} [\![f(u)]\!] = 0.$$

En particular, si $\tilde{t}'(s) \neq 0$ entonces

$$\frac{d\tilde{x}}{dt} = \left(\frac{d\tilde{x}}{ds}\right)\left(\frac{d\tilde{t}}{ds}\right)^{-1} =: \sigma$$

$$\Rightarrow \quad -\sigma [\![u]\!] + [\![f(u)]\!] = 0$$ sobre cada punto de Σ

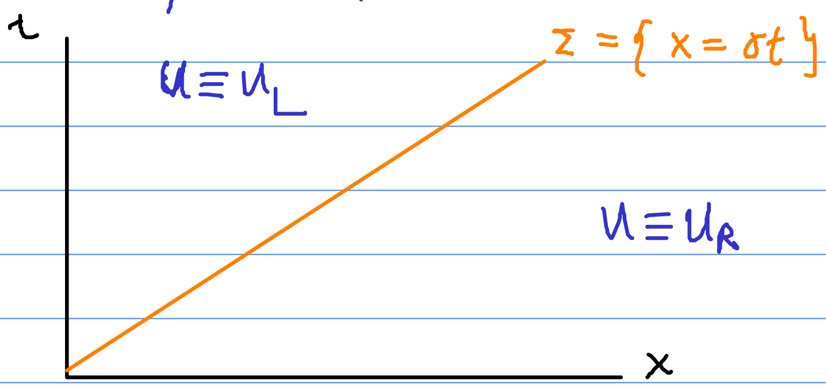
$\sigma = \frac{d\tilde{x}}{dt}$ es la velocidad de la discontinuidad.

Ejemplo: frente plano

$$(4) \ldots \quad u(x,t) = \begin{cases} u_L, & x < \sigma t \\ u_R, & x > \sigma t \end{cases}$$

con $u_L \neq u_R$, u_L, u_R constantes, $\sigma \in \mathbb{R}$.

$u_t + f(u)_x = 0$



El frente plano (4) es sol. débil si y sólo si

$$\sigma [\![u]\!] = \sigma(u_R - u_L) = f(u_R) - f(u_L)$$

$$\therefore \quad \sigma = \frac{f(u_R) - f(u_L)}{u_R - u_L}$$

σ es la velocidad del frente.

$f(u) = \frac{1}{2}u^2$ Burgers $\Rightarrow$ $\sigma = \frac{1}{2}(u_R + u_L)$

Observación: la forma conservativa de la ecuación es importante.

Burgers $\quad u_t + \left(\frac{1}{2}u^2\right)_x = 0$

Frente plano (4) con $u_R = 0,\ u_L = 1$

$$RH \Rightarrow \quad \sigma = \frac{1}{2}$$

Mult. la ecuación $\times\ u$:

$$\left(\frac{1}{2}u^2\right)_t + \left(\frac{1}{3}u^3\right)_x = 0$$

$$\Rightarrow \quad v_t + \tilde{f}(v)_x = 0 \qquad \begin{aligned} v &= \frac{1}{2}u^2 \\ \tilde{f}(v) &= \frac{1}{3}u^3 \\ &= \frac{1}{3}(2v)^{3/2} \end{aligned}$$

Mismo frente plano: $u_R = 0,\ u_L = 1$

$$\Rightarrow \quad \tilde{\sigma} = \frac{[\![\tilde{f}]\!]}{[\![\frac{1}{2}u^2]\!]} = \frac{2}{3} \neq \sigma = \frac{1}{2}$$

Las soluciones débiles no son iguales
La misma discontinuidad no conserva a u y a $\frac{1}{2}u^2$ simultáneamente.

$$u_t + \left(\frac{1}{2}u^2\right)_x = 0 \quad \neq \quad u_t + uu_x = 0$$

$$\neq \left(\frac{1}{2}u^2\right)_t + \left(\frac{1}{3}u^3\right)_x = 0$$

si trabajamos con soluciones <u>débiles</u>.

Próxima lección: pérdida de unicidad.
Solución entrópica.