Ecuaciones Diferenciales Parciales

Lección 1.3: Ecuaciones cuasi-lineales, parte II

Ramón G. Plaza
IIMAS-UNAM

Octubre 1, 2020.

1. Otro ejemplo
2. No existencia de soluciones C^1
3. Pérdida de unicidad
4. Aplicación: la ecuación de McKendrick

Existencia local - caso cuasilineal

Ecuaciones **cuasi-lineales** de primer orden:

$$a(x,y,u)u_x + b(x,y,u)u_y = c(x,y,u), \qquad \text{(CL)}$$

$a,b,c : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ funciones conocidas, Lipschitz continuas.

Datos iniciales:

$$\begin{aligned} \mathscr{I} &= \{(\tilde{x}(\xi),\tilde{y}(\xi)) \,:\, \xi \in I\} \subset \mathbb{R}^2, \\ u_{|\mathscr{I}} &= f(\xi), \end{aligned} \qquad \text{(CI)}$$

donde $\tilde{x},\tilde{y},f \in C^1(I;\mathbb{R})$ y $I \subseteq \mathbb{R}$

Condición de transversalidad:

$$\det \begin{pmatrix} \bar{x}_\xi & \bar{x}_\eta \\ \bar{y}_\xi & \bar{y}_\eta \end{pmatrix}_{|\eta=0} = \det \begin{pmatrix} \tilde{x}'(\xi) & a \\ \tilde{y}'(\xi) & b \end{pmatrix} \neq 0, \ \forall \xi \in I. \quad \text{(C3)}$$

Bajo estas condiciones, el teorema de existencia local garantiza la **existencia y unicidad de una solución de clase C^1 en una vecindad de la curva inicial**

$$\mathscr{I}' = \{(\tilde{x}(\xi), \tilde{y}(\xi), f(\xi)) : \xi \in I\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Condición de transversalidad:

$$\det\begin{pmatrix} \bar{x}_\xi & \bar{x}_\eta \\ \bar{y}_\xi & \bar{y}_\eta \end{pmatrix}_{|\eta=0} = \det\begin{pmatrix} \tilde{x}'(\xi) & a \\ \tilde{y}'(\xi) & b \end{pmatrix} \neq 0, \ \ \forall \xi \in I. \quad \text{(C3)}$$

Bajo estas condiciones, el teorema de existencia local garantiza la **existencia y unicidad de una solución de clase C^1 en una vecindad de la curva inicial**

$$\mathscr{I}' = \{(\tilde{x}(\xi), \tilde{y}(\xi), f(\xi)) \, : \, \xi \in I\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Ejemplo

Sea el problema de Cauchy para la ecuación **lineal**:

$$u_x + u_y + u = 1,$$

con datos $u(x, x^2 + x) = \sin x$, para $x > 0$.

Curva de datos: $\mathscr{I} = \{(\xi, \xi^2 + \xi) \, : \, \xi > 0\}$
Curva inicial: $\mathscr{I}' = \{(\xi, \xi^2 + \xi, \sin \xi) \, : \, \xi > 0\}$

Coeficientes: $a = 1$, $b = 1$, $c = 1 - u$.

Condición (C3):

$$\det\begin{pmatrix} \tilde{x}'(\xi) & a \\ \tilde{y}'(\xi) & b \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1+2\xi & 1 \end{pmatrix} = -2\xi \neq 0,$$

ya que $\xi > 0$.

Por el teorema de existencia local existe una única solución de clase C^1 en una vecindad de $\mathscr{I}'$.

Sistema característico:

$$\frac{dx}{d\eta} = 1, \qquad x(0) = \xi > 0,$$
$$\frac{dy}{d\eta} = 1, \qquad y(0) = \xi + \xi^2,$$
$$\frac{du}{d\eta} = 1 - u, \qquad u(0) = \sin\xi,$$

para cada $\xi > 0$, fijo.

Solución para x y y:

$$x = \eta + \xi, \qquad y = \eta + \xi^2 + \xi.$$

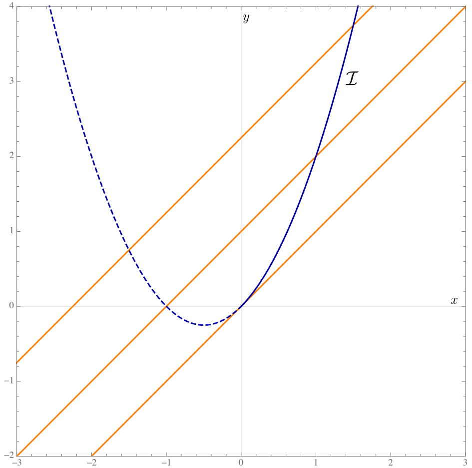

Figura: Características en el plano y curva de datos $\mathscr{I}$.

Resolviendo: $y-x=\xi^2$, con $\xi>0$

$$\xi=\sqrt{y-x}, \qquad \eta=x-\xi=x-\sqrt{y-x},$$

Ecuación para u:

$$\frac{du}{d\eta}+u=1.$$

Sol. homogénea: $u=Ce^{-\eta}$. Sol. particular: $u\equiv 1$.
Usando $u(0)=\sin\xi$:

$$u=1+(\sin\xi-1)e^{-\eta}.$$

Sustituyendo:

$$u(x,y)=1+\left(\sin\left(\sqrt{y-x}\right)-1\right)e^{-x+\sqrt{y-x}}.$$

Resolviendo: $y - x = \xi^2$, con $\xi > 0$

$$\xi = \sqrt{y-x}, \qquad \eta = x - \xi = x - \sqrt{y-x},$$

Ecuación para u:

$$\frac{du}{d\eta} + u = 1.$$

Sol. homogénea: $u = Ce^{-\eta}$. Sol. particular: $u \equiv 1$.
Usando $u(0) = \sin\xi$:

$$u = 1 + (\sin\xi - 1)e^{-\eta}.$$

Sustituyendo:

$$u(x,y) = 1 + \left(\sin\left(\sqrt{y-x}\right) - 1\right) e^{-x+\sqrt{y-x}}.$$

El dominio de definición de la función es $\{y > x\}$. Sin embargo, el dominio de definición de la **solución** es

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < y\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0,\ x + x^2 < y\}$$

Dado que no se cumple (C3) en $\xi = 0$, la unicidad se viola en una vecindad de la curva

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0,\ x + x^2 = y\}$$

dada la ambigüedad en el signo de ξ en $\xi^2 = y - x$. Es decir, la función

$$u(x,y) = 1 + \left(\sin\left(-\sqrt{y-x}\right) - 1\right) e^{-x-\sqrt{y-x}}.$$

también es solución de la ecuación diferencial (ejercicio).

El dominio de definición de la función es $\{y > x\}$. Sin embargo, el dominio de definición de la **solución** es

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < y\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0,\, x + x^2 < y\}$$

Dado que no se cumple (C3) en $\xi = 0$, la unicidad se viola en una vecindad de la curva

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0,\, x + x^2 = y\}$$

dada la ambigüedad en el signo de ξ en $\xi^2 = y - x$. Es decir, la función

$$u(x,y) = 1 + \left(\sin\left(-\sqrt{y-x}\right) - 1\right) e^{-x-\sqrt{y-x}}.$$

también es solución de la ecuación diferencial (ejercicio).

1. Otro ejemplo
2. No existencia de soluciones C^1
3. Pérdida de unicidad
4. Aplicación: la ecuación de McKendrick

¿Que pasa si no se cumple (C3)?

Supongamos que **existe** $u = u(x,y)$, solución de clase C^1 del problema de Cauchy (CL) - (CI). Por lo tanto, para toda $\xi \in I$,

$$u(\tilde{x}(\xi), \tilde{y}(\xi)) = f(\xi).$$

Derivando con respecto a ξ obtenemos

$$\tilde{x}'(\xi) u_x(\tilde{x}(\xi), \tilde{y}(\xi)) + \tilde{y}'(\xi) u_y(\tilde{x}(\xi), \tilde{y}(\xi)) = f'(\xi).$$

Sea $(x_0, y_0, z_0) := (\tilde{x}, \tilde{y}, f)(\xi_0)$ con $\xi_0 \in I$, **fijo**.
Sustituyendo en la expresión anterior y en la ecuación diferencial (CL) obtenemos el siguiente sistema algebraico para $(u_x, u_y)(x_0, y_0)$:

$$\begin{aligned} a_0 u_x(x_0, y_0) + b_0 u_y(x_0, y_0) &= c_0, \\ \tilde{x}'(\xi_0) u_x(x_0, y_0) + \tilde{y}'(\xi_0) u_y(x_0, y_0) &= f'(\xi_0), \end{aligned} \tag{SA}$$

donde $(a_0, b_0, c_0) = (a, b, c)(x_0, y_0, z_0)$.
Vamos a suponer que **la condición** (C3) **es falsa en** $\xi_0 \in I$:

$$\Delta_0 = \det \begin{pmatrix} \tilde{x}'(\xi_0) & a_0 \\ \tilde{y}'(\xi_0) & b_0 \end{pmatrix} = 0. \tag{NoC3}$$

La condición (NoC3) implica que los vectores en el plano $(\tilde{x}'(\xi_0), \tilde{y}'(\xi_0))^\top$ y $(a_0, b_0)^\top$ **son paralelos**. Existe $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = \alpha_0 \begin{pmatrix} \tilde{x}'(\xi_0) \\ \tilde{y}'(\xi_0) \end{pmatrix}.$$

Sustituyendo en (SA), y restando un α_0-múltiplo de la primera ecuación de la segunda, obtenemos la condición $f'(\xi_0) = \alpha_0 c_0$, es decir,

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} = \alpha_0 \begin{pmatrix} \tilde{x}'(\xi_0) \\ \tilde{y}'(\xi_0) \\ f'(\xi_0) \end{pmatrix}.$$

Conclusión: si la condición (C3) no se cumple en el punto ξ_0 entonces una condición **necesaria** para la existencia de una solución de clase C^1 en una vecindad del punto (x_0, y_0, z_0) es que los vectores $(a_0, b_0, c_0)^\top$ y $(\tilde{x}'(\xi_0), \tilde{y}'(\xi_0), f'(\xi_0))^\top$ sean **colineales**.

Lema

Sea $\xi_0 \in I$ fijo. Bajo la condición (NoC3)*, si los vectores $(a_0, b_0, c_0)^\top$ y $(\tilde{x}'(\xi_0), \tilde{y}'(\xi_0), f'(\xi_0))^\top$ no son colineales entonces* ***no existe*** *solución de clase C^1 a la ecuación* (CL) *con condición inicial* (CI) *en ninguna vecindad del punto (x_0, y_0, z_0).*

Pueden existir, sin embargo, otro tipo de soluciones.

Conclusión: si la condición (C3) no se cumple en el punto ξ_0 entonces una condición **necesaria** para la existencia de una solución de clase C^1 en una vecindad del punto (x_0, y_0, z_0) es que los vectores $(a_0, b_0, c_0)^\top$ y $(\tilde{x}'(\xi_0), \tilde{y}'(\xi_0), f'(\xi_0))^\top$ sean **colineales**.

Lema

Sea $\xi_0 \in I$ fijo. Bajo la condición (NoC3)*, si los vectores $(a_0, b_0, c_0)^\top$ y $(\tilde{x}'(\xi_0), \tilde{y}'(\xi_0), f'(\xi_0))^\top$ no son colineales entonces* ***no existe*** *solución de clase C^1 a la ecuación* (CL) *con condición inicial* (CI) *en ninguna vecindad del punto (x_0, y_0, z_0).*

Pueden existir, sin embargo, otro tipo de soluciones.

Ejemplo

Consideremos la ecuación

$$uu_x + u_y = 1,$$

con datos de Cauchy,

$$u(\tfrac{1}{4}y^2, y) = \tfrac{1}{2}y, \qquad y \in \mathbb{R}.$$

De acuerdo con nuestra notación, la curva inicial es

$$\mathscr{I}' = \{(\tilde{x}, \tilde{y}, f)(\xi) := (\tfrac{1}{4}\xi^2, \xi, \tfrac{1}{2}\xi) \, : \, \xi \in \mathbb{R}\},$$

y los coeficientes son $a = u$, $b = 1$ y $c = 1$.

Verificamos que (C3) no se cumple para ningún $\xi \in \mathbb{R}$:

$$\Delta_0 = \det \begin{pmatrix} \tilde{x}'(\xi) & a \\ \tilde{y}'(\xi) & b \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\xi & \frac{1}{2}\xi \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 0,$$

es decir, la curva de datos (en el plano) es siempre tangente a las características en $\eta = 0$.

También notamos que los vectores

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}_{|\mathscr{I}'} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\xi \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \begin{pmatrix} \tilde{x}'(\xi) \\ \tilde{y}'(\xi) \\ f'(\xi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\xi \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

no son colineales en ningún punto $\xi \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, por el Lema concluímos que **no existe ninguna solución de clase C^1 en una vecindad de la curva $\mathscr{I}'$.**

Consideremos el sistema característico asociado:

$$\frac{dx}{d\eta} = u, \qquad x(0) = \tfrac{1}{4}\xi^2,$$
$$\frac{dy}{d\eta} = 1, \qquad y(0) = \xi,$$
$$\frac{du}{d\eta} = 1, \qquad u(0) = \tfrac{1}{2}\xi,$$

para cada $\xi \in \mathbb{R}$. Resolviendo las ecuaciones para u y y obtenemos

$$y = \eta + \xi, \qquad u = \eta + \tfrac{1}{2}\xi.$$

Sustituyendo en la ecuación para x e integrando se tiene que,

$$x = \tfrac{1}{2}\eta^2 + \tfrac{1}{2}\xi\eta + \tfrac{1}{4}\xi^2.$$

El mapeo $(\eta, \xi) \mapsto (x, y)$ no es invertible en $\eta = 0$.

Consideremos el sistema característico asociado:

$$\frac{dx}{d\eta} = u, \qquad x(0) = \tfrac{1}{4}\xi^2,$$
$$\frac{dy}{d\eta} = 1, \qquad y(0) = \xi,$$
$$\frac{du}{d\eta} = 1, \qquad u(0) = \tfrac{1}{2}\xi,$$

para cada $\xi \in \mathbb{R}$. Resolviendo las ecuaciones para u y y obtenemos

$$y = \eta + \xi, \qquad u = \eta + \tfrac{1}{2}\xi.$$

Sustituyendo en la ecuación para x e integrando se tiene que,

$$x = \tfrac{1}{2}\eta^2 + \tfrac{1}{2}\xi\eta + \tfrac{1}{4}\xi^2.$$

El mapeo $(\eta,\xi) \mapsto (x,y)$ no es invertible en $\eta = 0$.

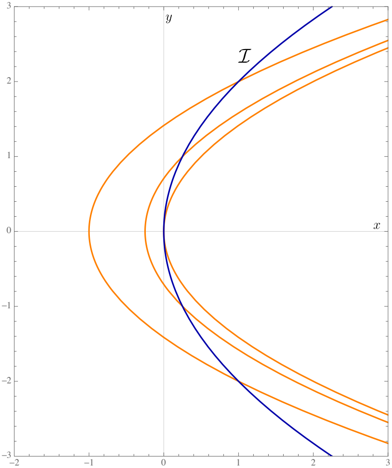

Figura: Características en el plano y curva de datos $\mathscr{I}$.

Notamos que podemos resolver para ξ y η en función de u y y. De este modo, $\eta = 2u - y$, y podemos escribir

$$x = \tfrac{1}{4}(\eta + \xi)^2 + \tfrac{1}{4}\eta^2 = \tfrac{1}{4}y^2 + (u - \tfrac{1}{2}y)^2.$$

Esta ecuación algebraica es de segundo orden en u, la cual tiene dos soluciones:

$$u^{\pm}(x,y) = \tfrac{1}{2}y \pm \sqrt{x - \tfrac{1}{4}y^2},$$

definidas en la región $D = \{4x > y^2\} \subset \mathbb{R}^2$.

Cada función $u^{\pm}$ es solución de la ecuación diferencial con mismos datos iniciales.

Notamos que podemos resolver para ξ y η en función de u y y. De este modo, $\eta = 2u - y$, y podemos escribir

$$x = \tfrac{1}{4}(\eta + \xi)^2 + \tfrac{1}{4}\eta^2 = \tfrac{1}{4}y^2 + (u - \tfrac{1}{2}y)^2.$$

Esta ecuación algebraica es de segundo orden en u, la cual tiene dos soluciones:

$$u^{\pm}(x,y) = \tfrac{1}{2}y \pm \sqrt{x - \tfrac{1}{4}y^2},$$

definidas en la región $D = \{4x > y^2\} \subset \mathbb{R}^2$.

Cada función $u^{\pm}$ es solución de la ecuación diferencial con mismos datos iniciales.

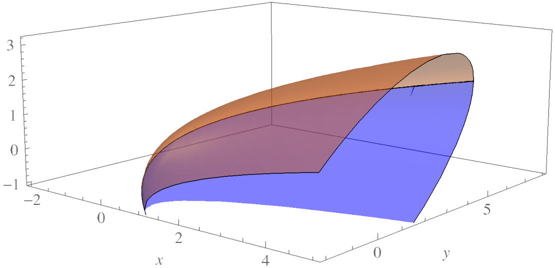

Figura: Soluciones u^+ (naranja) y u^- (azul).

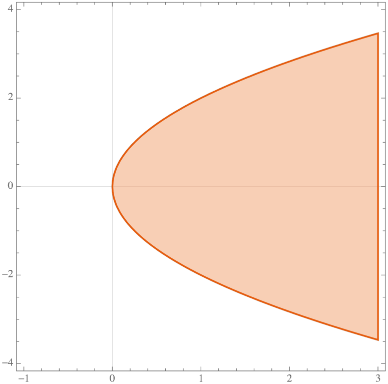

Figura: Región $D = \{4x > y^2\} \subset \mathbb{R}^2$.

Conclusiones:

- Hemos encontrado **dos soluciones de clase** $C^1(D)$
- Claramente satisfacen los datos iniciales en $\mathscr{I}$ (en $x = \frac{1}{4}y^2$ tienen límites **continuos** y coinciden con u_0)
- Ninguna de ellas es de clase C^1 en una vecindad de $\mathscr{I}'$ (las derivadas no tienen límites continuos en $\mathscr{I}'$)
- **Moraleja**: el método de características nos permite calcular soluciones razonables mas allá de lo que indica el teorema general.

1. Otro ejemplo
2. No existencia de soluciones C^1
3. Pérdida de unicidad
4. Aplicación: la ecuación de McKendrick

Hipótesis

- La condición de transversalidad (C3) no se cumple en ξ_0 (condición (NoC3)).
- Supondremos que la condición necesaria para tener una solución de clase C^1 sí se cumple **en una vecindad de** ξ_0: existen $\delta > 0$ y una función continua $\alpha : (\xi_0 - \delta, \xi_0 + \delta) \to \mathbb{R}_+$, distinta de cero (sin pérdida de generalidad, $\alpha > 0$), tales que

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}'(\xi) \\ \tilde{y}'(\xi) \\ f'(\xi) \end{pmatrix} = \alpha(\xi) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}_{|(\tilde{x}(\xi), \tilde{y}(\xi), f(\xi))} \qquad \text{(Col)}$$

para todo $\xi \in J := (\xi_0 - \delta, \xi_0 + \delta) \subset I$

Consideremos ahora una curva $\mathcal{C}$ en el plano, **transversal a** $\mathscr{I}$ (no tangente) en el punto (x_0, y_0). Sea

$$\mathcal{C} = \{(\hat{x}(\theta), \hat{y}(\theta)) : \theta \in (-\varepsilon, \varepsilon),\, \hat{x}(0) = x_0,\, \hat{y}(0) = y_0,\, \varepsilon > 0\}$$

una parametrización local de $\mathcal{C}$.

Dado que $\mathscr{I}$ y $\mathcal{C}$ son transversales en (x_0, y_0) se cumple la condición

$$\det \begin{pmatrix} \tilde{x}'(\xi_0) & \hat{x}'(0) \\ \tilde{y}'(\xi_0) & \hat{y}'(0) \end{pmatrix} = \alpha(\xi_0) \det \begin{pmatrix} a & \hat{x}'(0) \\ b & \hat{y}'(0) \end{pmatrix} \neq 0.$$

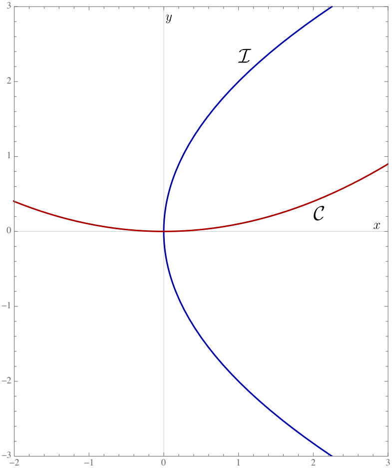

Figura: Curva $\mathcal{C}$, transversal en el origen a la curva de datos $\mathscr{I}$.

Podemos dar arbitrariamente **datos iniciales** sobre la curva $\mathcal{C}$: para cada función arbitraria $g = g(\theta)$, que satisface $g(0) = f(\xi_0) = z_0$, por el teorema de existencia local existe una solución de clase C^1 de (CL) en una vecindad de la curva

$$\mathcal{C}' = \{(\hat{x}(\theta), \hat{y}(\theta), g(\theta)) \,:\, |\theta| < \varepsilon\}.$$

Dicha solución genera una superficie $\mathcal{S}$ que contiene a la curva $\mathcal{C}'$.

Pero, como la curva $\mathscr{I}'$ es una **curva integral** del campo $(a,b,c)^\top$ que se intersecta con $\mathcal{C}'$ en (x_0, y_0, z_0), entonces la curva $\mathscr{I}'$ está contenida en la superficie $\mathcal{S}$ (lema de la clase anterior).

No unicidad

Conclusión: si la condición de colinealidad se cumple en toda una vecindad J de ξ_0 entonces es posible construir un número infinito de soluciones (una para cada g arbitraria que satisfaga $g(0) = f(\xi_0) = z_0$) de clase C^1 al problema de Cauchy.

Lema

Bajo la condición (Col) *en una vecindad J de ξ_0, el problema de Cauchy* (CL) - (CI) *tiene un número infinito de soluciones de clase C^1 en una vecindad del punto $(x_0, y_0, z_0) = (\tilde{x}(\xi_0), \tilde{y}(\xi_0), f(\xi_0))$.*

No unicidad

Conclusión: si la condición de colinealidad se cumple en toda una vecindad J de ξ_0 entonces es posible construir un número infinito de soluciones (una para cada g arbitraria que satisfaga $g(0) = f(\xi_0) = z_0$) de clase C^1 al problema de Cauchy.

Lema

Bajo la condición (Col) *en una vecindad J de ξ_0, el problema de Cauchy* (CL) - (CI) *tiene un número infinito de soluciones de clase C^1 en una vecindad del punto* $(x_0, y_0, z_0) = (\tilde{x}(\xi_0), \tilde{y}(\xi_0), f(\xi_0))$.

Ejemplo

Sea la ecuación lineal

$$xu_x + yu_y = u,$$

con datos de Cauchy $u(x,x) = x$. En este problema los coeficientes son $a = x$, $b = y$ y $c = u$. La curva de datos es $\mathscr{I}' = \{(\tilde{x}, \tilde{y}, f)(\xi) = (\xi, \xi, \xi)\}$. La condición (C3) es violada en virtud de que

$$\Delta_0 = \det \begin{pmatrix} \tilde{x}'(\xi) & a \\ \tilde{y}'(\xi) & b \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & \xi \\ 1 & \xi \end{pmatrix} = 0,$$

para cualquier $\xi \in \mathbb{R}$, lo que significa que los datos iniciales están determinados sobre una curva característica en el plano.

Los vectores

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}_{|\mathscr{I}'} = \begin{pmatrix} \xi \\ \xi \\ \xi \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \begin{pmatrix} \tilde{x}'(\xi) \\ \tilde{y}'(\xi) \\ f'(\xi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

son colineales para cualquier $\xi \in \mathbb{R}$, excepto en $\xi = 0$. Por el lema, para cada vecindad de cualquier $\xi \neq 0$ **existe una infinidad de soluciones de clase** C^1.

¿Cuáles son estas soluciones?

Para calcular algunas de ellas observamos que el sistema característico

$$
\begin{aligned}
\frac{dx}{d\eta} &= x, \qquad x(0) = \xi, \\
\frac{dy}{d\eta} &= y, \qquad y(0) = \xi, \\
\frac{du}{d\eta} &= u, \qquad u(0) = \xi,
\end{aligned}
$$

para cada $\xi \in \mathbb{R}$, tiene solución $x = y = u = \xi e^{\eta}$, por lo que claramente $u(x,y) = x$ y $u(x,y) = y$ son soluciones al problema de Cauchy.

Si definimos $u(x,y) = \alpha x + \beta y$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ constantes entonces se satisface la ecuación. Por la condición inicial, $u(x,x) = (\alpha + \beta)x = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$ si y sólo si $\alpha = 1 - \beta$. Obtenemos así una **familia infinita** de soluciones parametrizada por $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$u(x,y) = \alpha x + (1 - \alpha) y.$$

¿Son éstas **todas** las posibles soluciones de clase $C^1(\mathbb{R}^2)$ del problema de Cauchy? (Ejercicio, **Tarea 1**.)

Colinealidad en un sólo punto

Existe una posibilidad adicional que no hemos estudiado: que la condición de colinealidad (Col) se cumpla **sólo en el punto** $\xi = \xi_0$ **y no en una vecindad**:

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}'(\xi_0) \\ \tilde{y}'(\xi_0) \\ f'(\xi_0) \end{pmatrix} = \alpha_0 \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}_{|(\tilde{x}(\xi_0),\tilde{y}(\xi_0),f(\xi_0))},$$

para cierto α_0, pero que $(\tilde{x}', \tilde{y}', \tilde{f}')^\top$ y $(a,b,c)^\top$ no sean paralelos en $\xi \in (\xi_0 - \delta, \xi_0 + \delta)$, para cierto $\delta > 0$, exceptuando, por supuesto, el punto $\xi = \xi_0$.

Cuando esto sucede **no es posible establecer un comportamiento general**.

Colinealidad en un sólo punto

Existe una posibilidad adicional que no hemos estudiado: que la condición de colinealidad (Col) se cumpla **sólo en el punto** $\xi = \xi_0$ **y no en una vecindad**:

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}'(\xi_0) \\ \tilde{y}'(\xi_0) \\ f'(\xi_0) \end{pmatrix} = \alpha_0 \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}_{|(\tilde{x}(\xi_0),\tilde{y}(\xi_0),f(\xi_0))},$$

para cierto α_0, pero que $(\tilde{x}', \tilde{y}', \tilde{f}')^\top$ y $(a, b, c)^\top$ no sean paralelos en $\xi \in (\xi_0 - \delta, \xi_0 + \delta)$, para cierto $\delta > 0$, exceptuando, por supuesto, el punto $\xi = \xi_0$.

Cuando esto sucede **no es posible establecer un comportamiento general**.

Cada caso debe ser analizado por separado.

Ejemplos:

(I) Considere el problema de Cauchy:

$$yu_x + xu_y = 0,$$
$$u(e^{\xi}, e^{\xi}) = \tfrac{1}{2}\xi^2, \qquad \xi \in \mathbb{R}.$$

Entonces no existe solución de clase C^1 en ninguna vecindad del punto $(1,1,0)$. (**Tarea 1**.)

(II) Considere el siguiente problema de Cauchy:

$$uu_x + u_y = 1,$$
$$u(\xi - \xi^2, \xi) = \xi,$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}$. ¿Existe alguna solución de clase C^1 en una vecindad del punto $(2/9, 1/3, 1/3)$? (**Tarea 1**.)

Receso: regresamos en 5 min.

1. Otro ejemplo
2. No existencia de soluciones C^1
3. Pérdida de unicidad
4. Aplicación: la ecuación de McKendrick

Ley de crecimiento de Malthus

- Modelo **básico**: crecimiento exponencial (Malthus).
- Variable continuamente diferenciable, $P = P(t)$ aproxima la población a tiempo $t > 0$
- Ley de crecimiento de Malthus

$$\frac{dP}{dt} = rP,$$

  con $r > 0$ constante (tasa de reproducción per cápita).
- Si la población es conocida en $t = 0$, $P(0) = P_0$, entonces $P(t) = P_0 e^{rt}$.

Población estructurada por la edad

- Existen datos demográficos **estructurados por edad**.
- **Hipótesis**:
  - $P = P(a,t)$ aproxima la población de edad $a \geq 0$ a tiempo $t \geq 0$.
  - P es C^1 en las variables $(a,t) \in (0,+\infty) \times (0,+\infty)$ y continua en $(a,t) \in [0,+\infty) \times [0,+\infty)$
  - Ambas variables, $a \geq 0$ y $t \geq 0$, tienen unidades de tiempo (por ejemplo, años).

Modelación

- Después de $h \geq 0$ años, la diferencia

$$\Delta P = P(a+h, t+h) - P(a,t),$$

aproxima el número de decesos de la población cuya edad oscila entre a y $a+h$, y cuyas muertes ocurrieron entre t y $t+h$ años. No hay migración.

- Definimos la **tasa de mortandad**,

$$\mu = \mu(a,t) > 0,$$

como una variable continua que aproxima el número de decesos de edad $a \geq 0$ a tiempo $t \geq 0$ por habitante. Suponemos μ es **conocida** (se infiere estadísticamente).

La ecuación de McKendrick

De este modo,

$$P(a+h,t+h)-P(a,t)=-\int_0^h \mu(a+\xi,t+\xi)P(a+\xi,t+\xi)\,d\xi.$$

Dado que P es diferenciable, derivando con respecto a $h \geq 0$,

$$P_a(a+h,t+h)+P_t(a+h,t+h)=-\mu(a+h,t+h)P(a+h,t+h),$$

y evaluando en $h=0$, obtenemos la **ecuación de McKendrick**:

$$P_a+P_t+\mu(a,t)P=0, \qquad a\geq 0, \;\; t\geq 0. \qquad \text{(McK)}$$

Condiciones iniciales y de frontera

(McK) es una ecuación **semi-lineal**. Para completar el modelo es necesario imponer condiciones iniciales y de frontera:

Condición inicial:

$$P(a,0) = f(a), \qquad a \geq 0, \tag{CI}$$

es la distribución de población por edades en el tiempo inicial $t = 0$. Supondremos que la función $f = f(a)$ es **conocida**, resultado de información estadística.

Condición de frontera:

$$P(0,t) = g(t), \qquad t \geq 0, \tag{CF}$$

nos indica el número de nacimientos (edad $a = 0$) para cada tiempo $t \geq 0$. Observemos, sin embargo, que la función $g = g(t)$ **depende necesariamente de la población a tiempo** $t > 0$ (si la población es cero entonces no pueden ocurrir nuevos nacimientos). De esta manera podemos definir la **tasa de natalidad**,

$$\lambda = \lambda(a,t) > 0,$$

como una función que aproxima el número de nacimientos por habitante con padres de edad $a > 0$ a tiempo $t > 0$.

Claramente $\lambda \equiv 0$ si $a < a_0$, donde $a_0 > 0$ es la edad reproductiva mínima, y $\lambda \equiv 0$ si $a > a_1 > a_0$, donde $a_1 > 0$ representa la máxima edad de posible reproducción. Nuevamente supondremos que la función $\lambda = \lambda(a,t)$ es **conocida**, la cual puede extrapolarse a partir de datos estadísticos. Así, proponemos la siguiente expresión para la condición de frontera:

$$g(t) = \int_0^{+\infty} \lambda(\xi,t) P(\xi,t)\, d\xi.$$

Modelo de McKendrick

$$P_a + P_t + \mu(a,t)P = 0, \qquad a \geq 0, \;\; t \geq 0. \tag{McK}$$

$$P(a,0) = f(a), \qquad a \geq 0, \tag{CI}$$

$$P(0,t) = g(t), \qquad t \geq 0, \tag{CF}$$

$$g(t) = \int_0^{+\infty} \lambda(\xi,t) P(\xi,t)\, d\xi.$$

El modelo de McKendrick es una herramienta básica en **modelación demográfica y epidemiológica**.

Referencias: McKendrick (1926), artículo revisionista de Keyfitz y Keyfitz (1997).

Solución: mediante el método de características

Modelo de McKendrick

$$P_a + P_t + \mu(a,t)P = 0, \qquad a \geq 0, \;\; t \geq 0. \tag{McK}$$

$$P(a,0) = f(a), \qquad a \geq 0, \tag{CI}$$

$$P(0,t) = g(t), \qquad t \geq 0, \tag{CF}$$

$$g(t) = \int_0^{+\infty} \lambda(\xi,t) P(\xi,t)\, d\xi.$$

El modelo de McKendrick es una herramienta básica en **modelación demográfica y epidemiológica**.
Referencias: McKendrick (1926), artículo revisionista de Keyfitz y Keyfitz (1997).

Solución: mediante el método de características

Método de características

Para (a_0, t_0) **fijos** las **rectas características** de la ecuación son

$$\tilde{t}(s) = t_0 + s, \qquad \tilde{a}(s) = a_0 + s,$$

parametrizadas por $s \in \mathbb{R}$. Suponiendo $P = P(a,t) \in C^1$ es solución definimos:

$$\tilde{P}(s) = P(\tilde{a}(s), \tilde{t}(s)), \qquad \tilde{\mu}(s) = \mu(\tilde{a}(s), \tilde{t}(s))$$

Derivando sobre las características:

$$\frac{d\tilde{P}}{ds} = P_a(\tilde{a}(s), \tilde{t}(s)) + P_t(\tilde{a}(s), \tilde{t}(s)) = -\tilde{\mu}(s)\tilde{P}.$$

La solución a esta ecuación es simplemente

$$\tilde{P}(s) = \tilde{P}(s_0) \exp\Big(- \int_{s_0}^{s} \tilde{\mu}(\xi)\, d\xi \Big),$$

por lo que para cada (a,t) fijo obtenemos

$$P(a+s, t+s) = P(a+s_0, t+s_0) \exp\Big(- \int_{s_0}^{s} \mu(a+\xi, t+\xi)\, d\xi \Big),$$

con $s, s_0 \in \mathbb{R}$.

Casos:

(A) Si $a > t$ entonces escogemos $s_0 = -t$ para intersectar la recta característica con el eje $t = 0$ en $a - t$ donde tenemos información proveniente de la condición inicial (CI). Evaluando en $s = 0$ y $s_0 = -t$ obtenemos

$$P(a,t) = f(a-t)\exp\left(-\int_0^t \mu(a-\xi, t-\xi)\, d\xi\right).$$

Fórmula determinada por funciones conocidas.

(B) Si $a < t$ entonces escogemos $s_0 = -a$ para intersectar la recta característica con el eje $a = 0$ en $t - a$, donde tenemos información proveniente de la condición de frontera (CF). Evaluando en $s = 0$ y $s_0 = -a$ obtenemos,

$$P(a,t) = g(t-a)\exp\left(-\int_0^a \mu(a-\xi, t-\xi)\,d\xi\right).$$

Pero $g = g(t)$ no es conocida, depende de la solución. Sustituyendo

$$P(a,t) = \left(\int_0^{+\infty} \lambda(\xi, t-a)P(\xi, t-a)\,d\xi\right)\exp\left(-\int_0^a \mu(a-\xi, t-\xi)\,d\xi\right).$$

Observamos que **la solución** $P(a,t)$ **para** $a < t$ **depende del valor de** P **a tiempo** $t-a$. Esta es una ecuación integral con **retardo** para la solución.

Interpretación

(A) Si $a > t$ entonces la edad de la población que nos interesa es mayor que el tiempo transcurrido, por lo tanto la población **no depende de los nacimientos**. La población depende básicamente de la distribución por edades a tiempo $a - t > 0$ y del número de fallecimientos desde entonces.

(B) Si $a < t$ entonces el tiempo transcurrido es mayor que la edad de la población bajo consideración, por lo que la población de edad $a \geq 0$ depende tanto **de la tasa de mortandad como de los nacimientos que han ocurrido desde entonces**. En particular, la población depende de $P(\cdot, t - a)$ (es decir, de la población –de cualquier edad– en el **tiempo retardado** $t - a > 0$).

Condición de compatibilidad

En la frontera de ambas regiones ($t = a$) comparamos las fórmulas de solución para obtener la siguiente **condición de compatibilidad**:

$$f(0) = \int_0^{+\infty} \lambda(\xi, 0) f(\xi)\, d\xi, \qquad \text{(CC)}$$

la cual simplemente expresa que el número de nacimientos en $t = 0$ debida a padres de todas las edades (la variable de integración es $\xi \in (0, +\infty)$) debe ser igual a la población de edad $a = 0$ a tiempo $t = 0$. En particular, reconocemos que λ y f deben estar relacionadas. Notamos también que (CC) implica la continuidad de $P = P(a, t)$ en $t = a$, y que $g(0) = f(0)$.

Proposición

Si f, λ y μ son funciones continuamente diferenciables de sus argumentos que satisfacen la condición de compatibilidad (CC) *entonces la función $P = P(a,t)$, definida por las fórmulas anteriores es continuamente diferenciable en las regiones $a > t > 0$ y $t > a > 0$, y resuelve la ecuación* (McK). *Más aún, P es continua en $t = a$.*

Demostración: En la región $a > t$, mediante un cálculo directo obtenemos de la fórmula las derivadas de primer orden de P:

$$P_a = \exp\Big(-\textstyle\int_0^t \mu(a-\xi, t-\xi)\, d\xi\Big)\Big(f'(a-t) - f(a-t)\textstyle\int_0^t \mu_a(a-\xi, t-\xi)\, d\xi\Big),$$

$$\begin{aligned} P_t = \exp\Big(-\int_0^t \mu(a-\xi, t-\xi)\, d\xi\Big)\Big(&-f'(a-t) - \mu(a-t,0) f(a-t) - \\ &- f(a-t)\int_0^t \mu_t(a-\xi, t-\xi)\, d\xi\Big). \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$P_a + P_t = -P(a,t)\Big(\mu(a-t,0) + \int_0^t (\mu_a + \mu_t)(a-\xi, t-\xi)\, d\xi\Big).$$

Por otro lado, observamos que

$$\begin{aligned}\int_0^t (\mu_a+\mu_t)(a-\xi,t-\xi)\,d\xi &= -\int_0^t \frac{d}{d\xi}(\mu(a-\xi,t-\xi))\,d\xi \\ &= -\mu(a-t,0)+\mu(a,t).\end{aligned}$$

Sustituyendo obtenemos la ecuación de McKendrick: $P_a+P_t=-\mu P$. Por lo tanto P es solución de la ecuación si $a>t$. En el caso $t>a$, un cálculo análogo con la fórmula para $t>a$ (sustituyendo, literalmente, f por g y a por t) implica que P es solución de la ecuación (McK) en la región $t>a$. La continuidad de P en $t=a$ es consecuencia de la condición de compatibilidad (CC). $\square$

¿Cómo calcular g?

Para cada $t > 0$ fijo, podemos partir la integral de g y sustituir las expresiones para $P(\xi, t)$ de acuerdo al signo de $\xi - t$:

$$\begin{aligned} g(t) &= \int_0^t \lambda(\xi,t)P(\xi,t)\,d\xi + \int_t^{+\infty} \lambda(\xi,t)P(\xi,t)\,d\xi \\ &= \int_0^t \lambda(\xi,t)g(t-\xi)\exp\left(-\int_0^\xi \mu(\xi-\theta,t-\theta)\,d\theta\right)d\xi + \\ &\quad + \int_t^{+\infty} \lambda(\xi,t)f(\xi-t)\exp\left(-\int_0^t \mu(\xi-\theta,t-\theta)\,d\theta\right)d\xi. \end{aligned}$$

La última integral es una expresión que depende únicamente de $t \geq 0$ y está determinada por funciones conocidas. Por lo tanto, es posible calcularla explícitamente. La denotamos como

$$F(t) = \int_t^{+\infty} \lambda(\xi,t) f(\xi - t) \exp\left(- \int_0^t \mu(\xi - \theta, t - \theta)\, d\theta \right) d\xi.$$

Definimos también el núcleo

$$K(\xi,t) = \lambda(\xi,t) \exp\left(- \int_0^{\xi} \mu(\xi - \theta, t - \theta)\, d\theta \right), \qquad t > 0,\ \xi \geq 0.$$

Ecuación de Sharpe y Lotka

De esta manera llegamos a una **ecuación integral para** g:

$$g(t) = F(t) + \int_0^t K(\xi, t) g(t - \xi)\, d\xi, \qquad \text{(SL)}$$

obtenida por vez primera por Sharpe y Lotka (1911). Esta ecuación se puede resolver numéricamente y determina completamente a la función g en términos de funciones conocidas.

Próxima lección: ecuaciones completamente nolineales